



# Modélisation thermomécanique des disques de frein par une approche eulérienne.

Thi Mac-Lan Nguyen-Tajan

## ► To cite this version:

Thi Mac-Lan Nguyen-Tajan. Modélisation thermomécanique des disques de frein par une approche eulérienne.. Matériaux. Ecole Polytechnique X, 2002. Français. NNT: . pastel-00004110

**HAL Id: pastel-00004110**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00004110>**

Submitted on 22 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Thèse présentée pour obtenir le titre de*

**DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE**

*Spécialité : Mécanique des Solides*

**NGUYEN-TAJAN Thi Mac-Lan**

**Modélisation thermomécanique des disques de frein  
par une approche eulérienne**

*Soutenue le 14 janvier 2002 devant le jury composé de :*

MM. :	P.	LADEVEZE	<i>Président</i>
	G.	DEGALLAIX	<i>Rapporteur</i>
	D.	HIBBITT	<i>Rapporteur</i>
	M.H.	MAITOURNAM	<i>Examineur</i>
	J.J.	THOMAS	<i>Examineur</i>
	K.	DANG VAN	<i>Directeur de thèse</i>



## ABSTRACT

The objective of this thesis is to develop a numerical model of the thermal-mechanical behavior of an automotive brake disc, in order to assess its fatigue behavior. The approach gathers : new numerical strategies which use eulerian algorithms adapted to problems involving components subjected to a moving load ; a relevant modeling of the behavior of the material ; durability criteria adapted to the different damages undergone by the disc, taking account of the multi-axial and non-isothermal characteristics of the loadings.

A preliminary analysis of the physical phenomena occurring in the brake disc is led (high temperatures variations, severe thermal gradients in the disc, plastic deformations, friction, etc.) and their couplings (thermomechanical couplings, couplings between thermal phenomena and friction between the disc and the pads, etc. ) are analyzed. Then, a numerical modeling of the brake disc, based on realistic assumptions, can be proposed. This study can be realized thanks to the developments of new algorithms which save computational times. Their fundamental principle is to work not in the disc reference but in the loading's one and to use eulerian coordinates in order to represent the structure movement. These algorithms are described in the thesis. At last, a strategy is proposed to analyze the brake disc durability, based on a "consistent approach" which includes the modeling of the loading, the modeling of the material behavior, an efficient numerical structural strategy and relevant fatigue criteria. The objective is to reach the same "degree of precision" in the different items in order to have a robust and useful tool for engineers in charge of the brake disc design.

## RESUME

L'objectif de cette thèse est de proposer une modélisation du comportement thermomécanique des disques de frein automobiles pour la prédiction de leur tenue en fatigue. L'approche adoptée associe notamment : des stratégies numériques nouvelles qui reposent sur des algorithmes eulériens adaptés aux problèmes de pièces sous chargement mobile et répété ; une modélisation pertinente du comportement du matériau constituant les disques ; des critères de tenue adaptés aux différents endommagements subis par le disque, qui prennent notamment en compte le caractère multiaxial et anisotherme des sollicitations.

Dans un premier temps, est présentée une analyse des phénomènes physiques opérant dans un disque de frein en service (fortes amplitudes de température, gradients thermiques élevés, déformations plastiques, frottement disque /plaquette, etc. ) et de leurs couplages (couplages thermomécaniques, couplages contact disque/plaquettes et élévation de température, etc.). A partir de cette analyse, nous pouvons proposer une modélisation numérique du disque qui se fonde sur des hypothèses pertinentes. Cette modélisation utilise des algorithmes nouveaux qui permettent de diminuer considérablement les temps de calcul. Leur principe fondamental est de se placer dans un repère non plus lié à la structure mais au chargement et d'utiliser une approche eulérienne pour prendre en compte le mouvement de la structure dans ce repère. Ces algorithmes sont décrits dans cette thèse. Enfin, on propose une stratégie de dimensionnement qui repose sur une approche dite globale. Cette dernière consiste à proposer une modélisation des sollicitations, une modélisation du comportement du matériau, une stratégie de calcul de structure performant et des critères de tenue adaptés aux phénomènes d'endommagement observés. L'objectif est de donner un même « degré de précision » dans chacun des modèles pour assurer au global une filière robuste qui répond au besoin de l'ingénieur en charge de la conception des disques de frein.



## Remerciements

*Je voudrais tout d'abord remercier Pierre Ladevèze, directeur du LMT de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*J'adresse aussi mes plus vifs remerciements à David Hibbitt, fondateur et président d'HKS, éditeur du logiciel Abaqus, et à Gérard Degallaix, directeur de recherche au LML de l'Ecole Centrale de Lille, pour avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de mon travail. Leurs relectures, leurs observations et les discussions que nous avons eues ont été très enrichissantes pour moi.*

*Je remercie également Laurent Eléna et Frédéric Vantalon, chefs successifs du projet « Dimensionnement d'un frein dissipatif » au sein de PSA pour avoir naturellement intégré mes travaux dans le projet.*

*Je tiens également à remercier André Bignonnet, chef du service MATE (Mécanique Appliquée, Technologies et Ecologie) de la Direction de la Recherche et de l'Innovation Automobile de PSA Peugeot-Citroën, pour avoir initié cette thèse (avec la participation de Catherine Sanjeu que je remercie également) et pour m'avoir si chaleureusement accueillie dans son service. Je voudrais aussi le remercier pour tous les précieux conseils qu'il m'a prodigués et pour la confiance qu'il m'a témoignée au cours de ces années. Ses compétences techniques et scientifiques (je dirais même sa « philosophie de travail »), ses qualités humaines et managériales font de lui un « modèle de chef ».*

*Je remercie très chaleureusement Ky Dang Van, directeur de recherche au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, et directeur de cette thèse. Son expérience, ses compétences et sa notoriété dans le domaine de la mécanique et de la fatigue des structures n'ont d'égal que sa gentillesse.*

*Enfin, je voudrais adresser toute ma profonde gratitude envers les deux personnes qui m'ont encadrée tout au long de ces années : Jean-Jacques Thomas, chef de l'équipe Thermomécanique Sollicitation et Fiabilité du service MATE de PSA, et Habibou Maitournam, chercheur au LMS et professeur adjoint à l'Ecole Polytechnique. Leur compétence professionnelle et leurs innombrables qualités inspirent le respect et l'estime de tous. Tout simplement, MERCI. Merci pour tout ce que j'ai appris et pour votre bonne humeur, et ce malgré vos légendaires emplois-du-temps surchargés. J'espère que nous aurons encore souvent l'occasion de travailler ensemble.*

*Je remercie tout le service MATE de PSA grâce auquel j'ai pu travailler dans un environnement exceptionnel. Je remercie aussi tous ceux que j'ai côtoyés au LMS : Nirina, Joumana, Ingrid, Tamim, Habib, Frédéric... au bon souvenir de nos moments d'amitié. Je remercie également Benoît et Ida pour leur participation au pot (même si cela a fait venir les pompiers !). Je remercie Benjamin et Frédéric pour leurs contributions à la thèse. Leurs travaux m'ont permis de gagner un temps précieux.*

*Je voudrais profiter de cette page de remerciements pour exprimer toute ma gratitude envers mes parents et ma famille pour la confiance qu'ils m'ont toujours témoignée, leur éducation et leur amour qui sont un cadeau inestimable.*

*Enfin, je remercie du fond du cœur mon époux, Serge. Son amour, son affection et son infaillible disponibilité ont été un merveilleux soutien au cours de ces années... pas toujours faciles ! Enfin, un petit clin d'œil à ma petite Mâÿ, qui, dans le ventre de sa mère, a sagement assisté à toute la soutenance de thèse. Je leur dédie ce mémoire, ainsi qu'à tous les enfants qui suivront...*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Le disque de frein</b>	<b>7</b>
1.1 Contexte général . . . . .	7
1.2 Le système de freinage . . . . .	7
1.2.1 Fonction . . . . .	7
1.2.2 Les différents types de frein à friction . . . . .	8
1.2.3 Les matériaux du frein à disque . . . . .	12
1.3 Critères d'évaluation d'un système de freinage . . . . .	13
1.3.1 Efficacité . . . . .	14
1.3.2 Confort . . . . .	15
1.3.3 Endurance . . . . .	16
1.3.4 Autres critères . . . . .	19
1.3.5 Ordre de priorité selon les domaines d'application . . . . .	20
1.4 Analyse des phénomènes physiques . . . . .	21
1.4.1 Phénomènes thermiques . . . . .	21
1.4.2 Phénomènes mécaniques . . . . .	26
1.5 Enjeux et difficultés de l'étude . . . . .	29
1.5.1 Enjeux . . . . .	29
1.5.2 Multiplicité et couplage des phénomènes . . . . .	29
1.5.3 Globalité d'une étude . . . . .	30
1.6 Les approches existantes et leurs insuffisances . . . . .	31
1.6.1 Difficultés de la simulation numérique . . . . .	31
1.6.2 Les hypothèses classiques . . . . .	32
1.6.3 Exemples d'étude dans le domaine ferroviaire . . . . .	34
1.6.4 Exemples d'étude dans le domaine automobile . . . . .	35



1.6.5	Analyse des résultats numériques . . . . .	37
1.7	Objectif et stratégie . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Algorithmes adaptés aux structures soumises à des chargements mobiles</b>	<b>43</b>
2.1	Contexte général . . . . .	43
2.2	Diverses méthodes de résolution . . . . .	44
2.3	Principe des algorithmes développés . . . . .	45
2.4	Algorithme TRC . . . . .	46
2.4.1	Description du problème . . . . .	46
2.4.2	Equations du problème thermoélastoplastique continu écrites dans le repère du chargement . . . . .	46
2.4.3	Equations discrétisées du problème . . . . .	49
2.4.4	Résolution numérique du problème mécanique . . . . .	53
2.4.5	Schéma de l'algorithme T.R.C. mécanique pour un comportement élastoplastique cinématique linéaire . . . . .	55
2.4.6	Implémentation des algorithmes T.R.C. thermiques et mécaniques dans <i>Abaqus</i> . . . . .	56
2.5	Algorithme stationnaire . . . . .	61
2.5.1	Principe de l'algorithme . . . . .	61
2.5.2	Equations du problème thermomécanique continu stationnaire écrites dans le repère du chargement . . . . .	62
2.5.3	Equations discrétisées du problème . . . . .	67
2.5.4	Résolution numérique du problème mécanique . . . . .	70
2.5.5	Schéma de l'algorithme stationnaire . . . . .	73
2.5.6	Implémentation des algorithmes stationnaires dans <i>Abaqus</i> . . . . .	73
2.6	Calculs de validation . . . . .	77
2.6.1	Validation de l'algorithme T.R.C. sur une structure 2D . . . . .	77
2.6.2	Validation de l'algorithme stationnaire sur une structure 2D . . . . .	79
2.6.3	Validation de l'algorithme stationnaire thermique . . . . .	85
2.7	Cas particulier des structures périodiques . . . . .	86
2.7.1	Contexte industriel . . . . .	86
2.7.2	Positionnement du problème . . . . .	86
2.7.3	Principe de l'algorithme périodique . . . . .	87
2.7.4	Equations du problème et résolution . . . . .	87

2.7.5	Validation sur structure 2D . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Dimensionnement</b>	
	<b>des disques de frein</b>	<b>95</b>
3.1	L'approche globale de dimensionnement des disques de frein . . . . .	95
3.1.1	Stratégie de modélisation . . . . .	95
3.1.2	Modélisation du système . . . . .	96
3.1.3	Modélisation du matériau . . . . .	99
3.1.4	Modélisation de l'endommagement . . . . .	107
3.2	Application numérique . . . . .	121
3.2.1	Introduction . . . . .	121
3.2.2	Description du problème . . . . .	121
3.2.3	Evaluation des pressions de contact . . . . .	129
3.2.4	Calcul thermique . . . . .	141
3.2.5	Calcul mécanique . . . . .	156
3.2.6	Etude de l'endommagement . . . . .	172
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>177</b>
<b>A</b>	<b>Calculs de contact du disque de frein</b>	<b>179</b>
A.0.7	Influence du module de Young des garnitures des plaquettes . . . .	179
A.0.8	Influence du coefficient de frottement . . . . .	180
<b>B</b>	<b>Calculs thermiques</b>	
	<b>du disque de frein</b>	<b>181</b>
B.0.9	Distribution du flux de chaleur en fonction du rayon . . . . .	181
B.0.10	Distribution du flux de chaleur en fonction de la pression et du rayon . . . . .	182
B.0.11	Calcul thermique du freinage à 30 <i>bars</i> . . . . .	183
<b>C</b>	<b>Calculs mécaniques</b>	
	<b>du disque de frein</b>	<b>185</b>
C.0.12	Loi de comportement $n^o1$ . . . . .	185
C.0.13	Loi de comportement $n^o2$ . . . . .	186
<b>D</b>	<b>Application du critère de fatigue polycyclique anisotherme</b>	

à une sphère composite	187
Bibliographie	189

# Introduction

## Contexte et objectif

Avec le développement continu des nouvelles technologies dans l'industrie du transport, les véhicules sont toujours plus puissants et plus rapides. De ce fait, les systèmes de freinage doivent suivre ce même rythme de progression. Le frein, organe majeur de sécurité, reste ainsi un composant très étudié par les ingénieurs. La concurrence automobile devenant plus pressante, s'ajoutent aux soucis d'efficacité, de fiabilité et de confort, ceux du moindre coût et du délai de fabrication. L'objectif de l'ingénieur est donc de trouver le meilleur compromis entre ces exigences de sécurité et ces contraintes technico-économiques. Pour mieux approcher la solution "idéale", il convient de mettre en œuvre des techniques numériques pouvant compléter les études expérimentales, et ce, le plus tôt possible dans la chaîne de conception.

Le disque de frein automobile, comme le montre l'expérience, peut subir des dégradations dont l'origine réside dans les sollicitations couplées mécaniques (pression des garnitures sur le disque et serrage du disque sur le moyeu) et thermiques (échauffement par frottement). A cause de la complexité du système, les modélisations numériques ne sont envisageables que si elles reposent sur des hypothèses simplificatrices. Ainsi, la plupart des études ne modélisent pas les phénomènes de contact frottant, les couplages thermomécaniques ou le comportement anélastique des matériaux. De même, l'hypothèse d'axisymétrie est communément faite et donc la rotation du disque et les phénomènes tridimensionnels sont négligés. Ces insuffisances, qui permettent de gagner du temps de calcul, rendent la prédiction de la réponse thermomécanique du disque mauvaise.

**L'objectif de cette thèse est de proposer une modélisation du comportement thermomécanique des disques de frein pour la prédiction de leur tenue en fatigue. L'approche adoptée associe notamment :**

- des stratégies numériques nouvelles, adaptées aux problèmes de pièces sous chargement transitoire mobile et répété ;
- une modélisation pertinente du comportement des matériaux constituant les disques ;
- une modélisation des différents endommagements prenant en compte le caractère multiaxial et anisotherme des sollicitations.

Cette proposition repose sur une étude préalable des phénomènes physiques rencontrés dans le problème du disque de frein : cycles thermiques à fortes variations de température ; apparition d'importants gradients thermiques dans le disque ; couplage de ces phénomènes avec des problèmes de contact frottant entre le disque et les plaquettes de frein ; cycles mécaniques avec des déformations plastiques, etc. Une fois que ces phénomènes sont analysés et que leurs couplages sont mieux appréhendés, on peut proposer une modélisation du système de frein qui se fonde sur des hypothèses pertinentes. Cette analyse numérique n'est rendue possible que grâce au développement de nouveaux algorithmes de résolution qui diminuent les temps de calcul. Leur principe fondamental est de travailler dans le repère du chargement. Selon les problèmes à résoudre, trois différents algorithmes ont été développés : une méthode *transitoire*, une dite *stationnaire passage par passage* et une dernière dite *stationnaire directe*. Un autre algorithme appelé *algorithme périodique* est également présenté ; il s'agit d'une adaptation de l'algorithme stationnaire pour les structures périodiques, tels les disques de frein ventilés. Dans un premier temps, ces algorithmes sont décrits. Des exemples simples permettent de les valider et de montrer leurs intérêts. Enfin, la stratégie de dimensionnement repose sur une *approche globale* qui intègre les effets de structure (système disque/environnement), le comportement du matériau et les phénomènes qui conduisent à l'endommagement. Toutes ces analyses sont menées conjointement, avec un même degré de précision. L'ossature de cette stratégie de modélisation est illustrée par une première étude de dimensionnement. Les premiers calculs de disque sont effectués et corrélés avec des essais sur banc dynamométrique ; ils montrent la pertinence des méthodes numériques mises en place. Ils permettent aussi la détermination des cycles thermomécaniques subis par le disque au cours d'un freinage-type ; ceux-ci sont finalement analysés en terme d'endommagement.

## Le problème du disque de frein

L'objectif de cette étude est d'étudier la tenue en service du disque. L'expérience montre que, soumis à des sollicitations sévères, correspondant généralement à des essais sur banc, il peut fissurer en surface, en pied d'ailette, ou même rompre au niveau de la gorge. Pour prédire l'apparition de ces avaries, il faut d'abord comprendre les phénomènes qui les génèrent. Une analyse bibliographique montre que la principale sollicitation vient des fortes variations de température induites par le frottement des plaquettes contre le disque. En effet, la température peut varier de  $20^{\circ}\text{C}$  à plus de  $700^{\circ}\text{C}$  en quelques secondes seulement. Ces brusques variations ne permettent pas à la température de s'homogénéiser. De ce fait, le disque est le lieu de très forts gradients thermiques dans l'épaisseur des pistes de frottement, mais aussi dans la direction circonférentielle. Ces derniers gradients sont dus au fait que le flux de chaleur qui entre dans le disque est localisé sous les plaquettes de frein et que le disque tourne. Parfois, il apparaît ce qu'on appelle des *points chauds* ; ce sont des zones circulaires régulièrement espacées sur les pistes où la température est localement plus élevée. Soumis à de tels cycles thermiques, le disque subit des déformations anélastiques (plastiques voire même viscoplastiques) qui sont elles aussi inhomogènes dans la pièce.

Pour prédire numériquement les champs thermomécaniques qui s'établissent dans le disque, il est fondamental de mettre en place une méthode de calcul qui prenne en compte les couplages essentiels entre les différents phénomènes, le caractère transitoire de l'histoire thermique du disque, le comportement anélastique du matériau, les gradients thermomécaniques orthoradiaux et la rotation du disque. On se rend vite compte que la simulation d'un freinage par une méthode classique par éléments finis engendrerait des temps de calcul exorbitants. Pour contourner cette difficulté, des algorithmes adaptés à des problèmes de structures soumises à des chargements mobiles ont été développés.

## Algorithmes adaptés aux structures soumises à des chargements mobiles

Les problèmes de structures soumises à des chargements thermomécaniques mobiles sont nombreux : rail soumis au roulement d'une roue, pneu soumis à la pression de la route, engrenages, disque de frein, courroie de distribution, etc. On se propose de développer des algorithmes qui permettent d'effectuer des simulations complexes (avec prise en compte de diverses non-linéarités de comportement, de contact..., avec des modèles à très grand nombre de degrés de liberté... ) en des temps de calcul raisonnables.

L'idée principale de ces algorithmes de résolution dits *eulériens* est de travailler non plus dans le repère de la structure mais dans un repère lié au chargement. Dans ce repère, les gradients thermomécaniques sont généralement importants dans des zones fixes. On peut donc se contenter de ne mailler finement que ces zones fixes et traiter grossièrement le reste de la structure. Du point de vue du chargement, la structure est mobile ; l'utilisation de coordonnées eulériennes permet alors de prendre en compte le flux de matière. Enfin, on fait l'hypothèse que la structure subit des petites transformations. On choisit alors comme configuration de référence celle qui suit le mouvement rigide de la structure. De ce fait, les distorsions des éléments du maillage sont faibles ; on évite les réactualisations de géométrie qui sont habituellement nécessaires dans les problèmes à grands déplacements et qui reposent sur des méthodes numériques d'adaptation de maillage très coûteuses en temps de calcul.

Trois différents algorithmes ont été développés :

- l'algorithme TRC (Transitoire dans le Repère du Chargement) qui permet de traiter tous les problèmes transitoires ;
- l'algorithme stationnaire passage par passage qui permet d'obtenir l'état de la structure après chaque passage de chargement (un calcul par passage) ;
- l'algorithme stationnaire direct qui permet d'évaluer directement la réponse stabilisée de la structure lorsqu'elle est soumise à un très grand nombre de passages tous identiques. Dans cette méthode, on fait l'hypothèse que la structure s'adapte ou s'accommode.

Les équations thermomécaniques continues et discrétisées correspondant aux trois algorithmes sont écrites. Leurs résolutions sont ensuite détaillées, ainsi que les algorithmes

numériques et leurs implémentations dans le code de calcul *Abaqus*. Des exemples simples de validation permettent de montrer les avantages et la pertinence des méthodes.

Enfin, le cas des structures dites périodiques, tels les disques de frein ventilés, est traité. En effet, les algorithmes eulériens développés ne peuvent s'appliquer tels quels aux structures inhomogènes. Une adaptation est donc nécessaire. Le problème stationnaire appliqué aux structures périodiques est décrit, résolu et l'algorithme est illustré par un exemple bidimensionnel.

## Dimensionnement des disques de frein

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la tenue en service d'un disque de frein automobile plein. Elle repose sur une approche globale de dimensionnement. Celle-ci consiste à étudier simultanément le système (disque, chargement et conditions aux limites), le comportement du matériau et les mécanismes d'endommagement.

Les difficultés de l'étude du système sont de deux types. D'abord, comme on l'a montré dans les chapitres précédents, la simulation d'un disque de frein est un problème numérique complexe car il faut prendre en compte la rotation du disque, la présence de forts gradients thermomécaniques, le contact, les couplages, etc. Ensuite, il faut tenir compte du fait que le disque voit dans sa vie une multitude de freinages tous différents les uns des autres (les clients sont différents, les routes empruntées sont variables, etc.). Une approche statistique du problème permettra alors de définir à partir de données expérimentales un freinage-équivalent en terme de dommage (*ce travail n'est toutefois pas abordé dans le cadre de la thèse*). Cela signifie que, soumis à ce *cycle-équivalent* répété un certain nombre de fois, le disque s'endommage de la même manière que s'il avait été soumis à toute l'histoire réelle de chargement. La démarche consiste alors à prédire la réponse *stabilisée* du disque lorsqu'il subit ce cycle-équivalent.

La modélisation du matériau doit prendre en compte les fortes amplitudes de température. Dans les gammes d'utilisation du disque, la fonte a un comportement élastoplastique, voire élastoviscoplastique. Il faut donc disposer d'un modèle rhéologique suffisamment représentatif du comportement réel du matériau mais qui reste simple à identifier et dont l'implémentation numérique est facile. Enfin, l'identification des paramètres du matériau doit s'effectuer sur un cycle stabilisé de l'éprouvette testée puisque c'est la réponse stabilisée de la structure qui sera analysée en terme d'endommagement.

L'étude bibliographique a permis d'identifier les différents types d'endommagement subis par le disque : la rupture du bol s'apparente à de la fatigue oligocyclique, tandis que les fissures sur piste proviennent vraisemblablement de mécanismes de fatigue polycyclique. Après une brève description des différents critères de fatigue et une petite discussion, le choix s'est porté sur un critère énergétique pour la fatigue à petit nombre de cycles et le critère de Dang Van pour la fatigue à grand nombre de cycles. Ces critères

ont l'avantage de pouvoir s'appliquer à des problèmes multiaxiaux. Le critère énergétique tient compte du caractère anisotherme des cycles de sollicitations. Par contre, le critère de Dang Van nécessite une extension anisotherme, qui est proposée et décrite.

Enfin, la mise en œuvre des méthodes proposées est présentée dans la seconde partie de ce chapitre. La simulation d'un disque de frein plein est décrite. La démarche de calcul est la suivante : un premier calcul de contact permet d'estimer les distributions de pression et de flux de chaleur imposés au disque, localisés sur la surface réelle de contact. Une analyse thermique transitoire du disque est effectuée avec l'algorithme TRC. On en déduit l'histoire thermique du disque. Suit alors un calcul élastoplastique stationnaire passage par passage qui permet la détermination de la réponse mécanique de la pièce. Les résultats sont corrélés avec des mesures effectuées sur un banc dynamométrique. La température est relevée par un thermocouple frottant et des pyromètres optiques. Les déformations sont mesurées par des rosettes embarquées sur le disque. Ces simulations montrent que les méthodes numériques eulériennes utilisées permettent de mettre en évidence des effets de structure dus au chargement et aux conditions aux limites non-axisymétriques. Les critères de fatigue sont enfin appliqués à ce cycle mécanique.





# Chapitre 1

## Le disque de frein

### 1.1 Contexte général

Grâce aux continuel progrès technologiques dans l'industrie du transport, les véhicules sont devenus plus puissants et plus rapides. De ce fait, les systèmes de freinage doivent aussi suivre cette progression pour assurer un fonctionnement adéquat avec les dernières améliorations. Le frein, organe de sécurité, reste ainsi un sujet d'étude très actuel pour les ingénieurs. L'apparition de nouveaux matériaux (alliages divers, céramique, etc. ) et de nouveaux procédés de fabrication ou de traitement de surface (grenaillage, trempe par induction, etc. ) génère de nouveaux types de frein et donc la nécessité de nouvelles études. De plus, avec la concurrence industrielle toujours croissante, les problématiques changent : en plus du soucis d'efficacité, de fiabilité et de confort, s'ajoute ceux du moindre coût et du délai de fabrication. L'objectif pour l'ingénieur est de trouver le meilleur compromis entre ces exigences. Il s'agit alors remplacer, du moins, compléter les essais expérimentaux par des analyses numériques afin de tester plus de possibilités pour mieux s'approcher du meilleur compromis, réduire les coûts en fabriquant moins de prototypes et minimiser les durées d'étude en limitant le nombre d'essais.

### 1.2 Le système de freinage

#### 1.2.1 Fonction

On appelle frein tout système capable de ralentir ou d'arrêter la progression d'une pièce en déplacement. Toute structure en mouvement possède une énergie cinétique proportionnelle à sa masse  $m$  et à sa vitesse  $v$ , soit  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , et une énergie potentielle proportionnelle à sa masse et à son altitude  $z$ , soit  $E_p = mgz$ . Le frein est donc un système qui doit être capable de transformer ces énergies mécaniques en une autre énergie. Le plus souvent, cette énergie récupérée est dissipée sous forme de chaleur soit par un système de friction (frein à disque, frein à tambour...), soit par une compression de gaz (frein moteur), soit par effet joule (ralentisseur électrique), etc. Mais elle peut également être

transformée en énergie magnétique, comme dans le cas des freins à courant de Foucault, que l'on trouve dans le domaine ferroviaire. Il existe aussi d'autres systèmes de freinage : freins aérodynamiques, freins rhéostatiques... Nous ne nous intéressons qu'aux freins à friction, très répandus dans l'industrie automobile, et qui sont les seuls à permettre à la fois le ralentissement et le maintien à vitesse constante d'un véhicule se trouvant sur une pente.

## 1.2.2 Les différents types de frein à friction

### 1.2.2.1 Frein à sabots

Le premier frein à friction est apparu sous forme de sabots sur les chariots tirés par des animaux. Pour freiner le mouvement, on pressait les sabots contre les roues du chariot. Ce dispositif, toujours utilisé dans l'agriculture et parfois dans le domaine ferroviaire, a été repris par l'automobile lorsque la vitesse des voitures ne dépassait pas les  $25\text{km/h}$ . Les freins à sabots ont vite été remplacés par les freins à tambour et les freins à disque, beaucoup plus efficaces.

### 1.2.2.2 Frein à tambour

Le frein à tambour est apparu dans les années 1920. Il est encore utilisé à nos jours, le plus souvent, à l'arrière des voitures particulières de bas de gamme et de moyenne gamme.

Le frein à tambour (*fig. 1.1*) est composé de :

- un **tambour**, pièce métallique liée à la roue et qui lui est intérieur ;
- des **garnitures** en matériau composite fixées sur **deux segments** - aussi appelés mâchoires - en forme de demi-cercles ;
- un **piston** relié aux deux segments.

Lors d'un freinage, le piston écarte les deux segments. Ceux-ci s'arc-boutent et pressent les garnitures contre le tambour qui tourne avec la roue. Ainsi, le mouvement de rotation est ralenti. Le rappel des segments est assuré par des ressorts.

### 1.2.2.3 Frein à disque

Le frein à disque est apparu dans les années 1950. Il est très largement utilisé aujourd'hui dans l'automobile, mais aussi dans le ferroviaire et l'aéronautique.

Le frein à disque (*fig. 1.2*) est composé de :

- un **disque** généralement en fonte lié à la roue par l'intermédiaire du moyeu et qui lui est intérieur ;

- **deux plaquettes** de part et d'autre du disque, composées chacune d'une garniture en matériau composite collée ou rivetée sur un support métallique ;
- un **étrier** en acier, solidaire de l'essieu (par l'intermédiaire du pivot par exemple), qui supporte les plaquettes ; en forme de chape, il recouvre un secteur du disque ;
- un **piston hydraulique** dans le cas d'un étrier flottant ou coulissant (*fig. 1.3*), ou deux pistons dans le cas d'un étrier fixe (*fig. 1.4*) posés contre les supports des plaquettes.

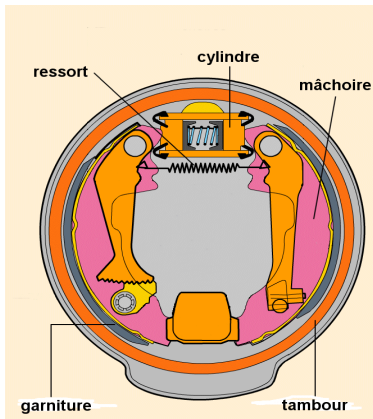


FIG. 1.1: Le système de frein à tambour

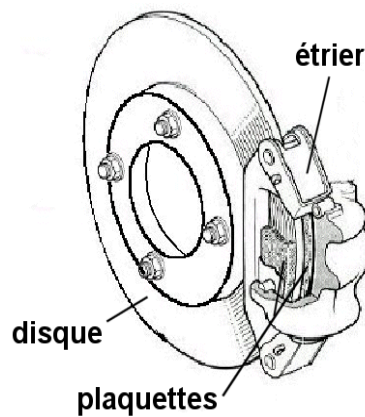


FIG. 1.2: Le système de frein à disque

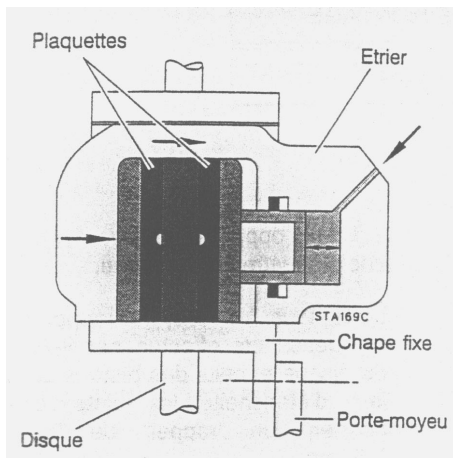


FIG. 1.3: Le système à étrier flottant

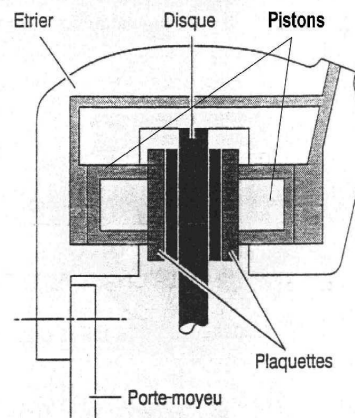


FIG. 1.4: Le système à étrier fixe

Lorsque le véhicule est en mouvement, le disque est en rotation. Dans le cas d'un système à étrier coulissant, pendant la phase de freinage, un circuit hydraulique commandé par la pédale de frein actionne le piston qui presse la première plaquette (plaquette interne) contre le disque. Lorsque celle-ci est en contact avec le disque, l'étrier se déplace par réaction grâce à un système de coulissage et entraîne la seconde plaquette contre le disque. Dans le cas de l'étrier fixe, qui est rigidement attaché à l'essieu et qui comporte deux pistons opposés alimentés par un même circuit hydraulique, les deux pistons viennent presser les deux plaquettes sur le disque lors de la mise en pression. L'avantage de ce dispositif par rapport à l'étrier coulissant est la moindre quantité de liquide mise en

jeu (puisque chaque piston ne parcourt qu'une demi distance). En contrepartie, le risque de mettre en ébullition le liquide de frein est doublé. Il faut donc isoler thermiquement les pistons, ce qui provoque un coût supplémentaire. De plus, l'encombrement est bien plus important. C'est donc l'étrier coulissant qui est le plus usité. Une fois le contact entre le disque et les plaquettes établi, la pression des plaquettes, combinée avec la rotation, induit un frottement qui permet le ralentissement de la rotation du disque. Des joints d'étanchéité, qui ont une forme de lèvre étudiée, sont placés autour du piston et, par leur comportement élastique, ramènent ce dernier dans son logement en fin de freinage. Ainsi, les plaquettes sont décollées du disque. Les supports métalliques transmettent la pression hydraulique aux garnitures ; ils permettent d'obtenir une distribution de pression relativement homogène sous les plaquettes. Ils permettent aussi la fixation des garnitures et le positionnement angulaire des plaquettes dans l'étrier.

Il existe deux types de disque : les disques pleins et les disques ventilés. Les disques pleins, de géométrie simple et donc de fabrication simple, sont généralement placés sur l'essieu arrière de la voiture. Ils se composent tout simplement d'une couronne pleine reliée à un "bol" qui est fixé sur le moyeu de la voiture (*fig. 1.5*). Les disques ventilés, de géométrie plus complexe, sont apparus plus tardivement. Ils se trouvent la plupart du temps sur le train avant. Toutefois, ils sont de plus en plus à l'arrière et à l'avant des voitures de haut de gamme. Composés de deux couronnes - appelées flasques - séparées par des ailettes (*fig. 1.6*), ils refroidissent mieux que les disques pleins grâce à la ventilation entre les ailettes qui, en plus, favorisent le transfert thermique par convection en augmentant les surfaces d'échange. Le disque ventilé comporte plus de matière que le disque plein ; sa capacité d'absorption calorifique est donc meilleure. Le nombre, la taille et la forme (ailettes radiales, incurvées, pions circulaires...) des ailettes sont variables (*fig. 1.7*).



FIG. 1.5: Exemple de disque plein



FIG. 1.6: Exemple de disque ventilé

Si pendant les débuts de l'automobile, le frein à tambour était très utilisé, c'était pour son effet autoamplificateur du couple de freinage qui permettait de limiter l'effort de commande. De plus, sa fabrication est comparativement simple. Par contre, comme il ne baigne pas dans l'air, sa capacité d'échange thermique est faible comparée à celle du frein à disque. De ce fait, même s'il est un peu moins coûteux que le frein à disque, ce dernier tend à le remplacer progressivement dans l'automobile. Dans l'aéronautique où les énergies à dissiper sont bien plus élevées, le frein à disque a été complètement adopté.

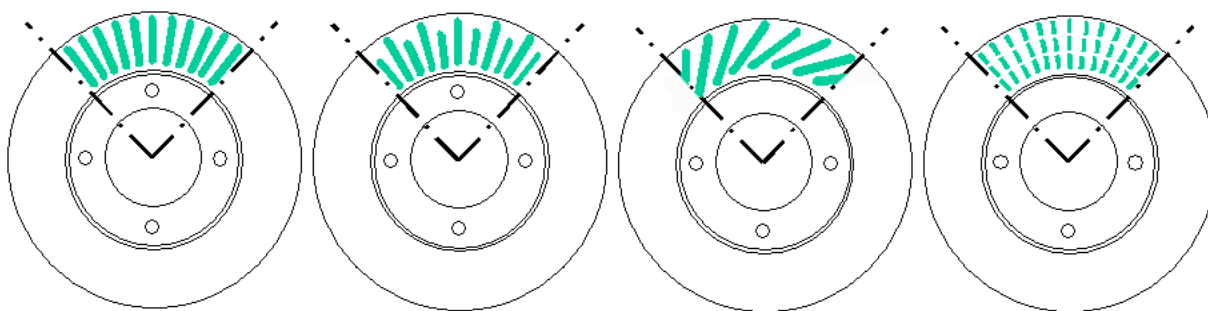


FIG. 1.7: Différentes géométries d'ailettes

Une extension vers le frein multidisque qui, dans un encombrement très semblable, permet d'augmenter les surfaces d'échange et la capacité calorifique globale, est actuellement utilisée pour le freinage des avions gros porteurs (*fig. 1.8*). Dans le secteur automobile, où les énergies à dissiper deviennent petit à petit plus importantes, on voit apparaître des études sur le frein à disque dit de "full-contact". Il s'agit d'un système classique de frein à disque, pour lequel les plaquettes de friction recouvrent le disque sur toute sa circonférence. Le but est d'augmenter la surface de contact pour rendre le frottement plus efficace mais la dissipation de chaleur est bien entendu plus difficile. Cette solution reste actuellement à l'étude et n'a à ce jour aucune application concrète.

Le système le plus répandu reste le frein à disque, plein ou ventilé. Le disque sera la structure étudiée dans cette étude. Sachant que les ventes mondiales du groupe PSA sont de l'ordre de 3 millions de voitures par an, si l'on considère que chaque véhicule comporte en moyenne deux disques de frein, cela signifie que l'on fabrique 6 millions de pièces par an. Le prix de la fonte est proche de 20 francs par kilogramme. Un disque pèse environ 5 *kg*. Il y a donc en jeu 600 millions de francs par an. Si l'on considère le marché mondial, on fabrique environ 50 millions de véhicules par an. Il s'agit alors d'une somme de 10 milliards de francs.

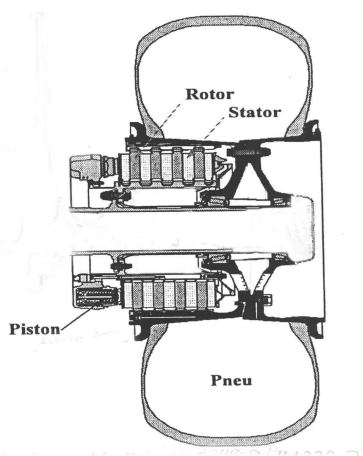


FIG. 1.8: Le multidisque en aéronautique

### 1.2.3 Les matériaux du frein à disque

Les matériaux des composants du système de freinage sont choisis selon les critères suivants : la fonction de la pièce, le coût de la matière première et sa facilité de fabrication, la masse.

#### 1.2.3.1 Le disque

Afin d'assurer un bon comportement thermique et mécanique, le matériau idéal pour le disque de frein doit pouvoir emmagasiner beaucoup de chaleur et supporter un effort mécanique important, sur une large gamme de température de fonctionnement (dans l'automobile, les températures d'utilisation varient entre  $0^{\circ}C$  et  $800^{\circ}C$  ; dans l'aviation les températures peuvent atteindre les  $3000^{\circ}C$ ). De plus, il doit être bon marché et être de fabrication relativement facile.

Ainsi, s'il existe des matériaux à meilleur comportement thermomécanique, la fonte grise à graphite lamellaire est la plus communément utilisée dans l'industrie automobile. En effet, la fonte est peu chère, se fabrique aisément et peut être coulée facilement. Elle présente également une bonne conductivité, une assez bonne résistance mécanique, et une faible usure. Les proportions de carbone et les ajouts de différents types d'éléments d'addition (phosphore, potassium, silicium, manganèse, cuivre, soufre, nickel, chrome, molybdène, aluminium, autres éléments d'alliages et des impuretés diverses) permettent de faire varier légèrement les propriétés thermomécaniques de la fonte qui reste ainsi en perpétuelle évolution [13][47][51]. On rappelle que plus la teneur en carbone est élevée, plus la résistance mécanique de la fonte est mauvaise. Par contre, la conductivité augmente, ce qui diminue les contraintes thermiques.

Dans le secteur ferroviaire, on utilise aussi de la fonte grise, mais on trouve de plus en plus, pour les trains à grande vitesse, des aciers alliés au chrome, au molybdène et au vanadium, trempés et revenus. Ces aciers ont des limites d'élasticité élevées ( $R_e > 1000 MPa$  à  $20^{\circ}C$  et  $R_e > 800 MPa$  à  $450^{\circ}C$  [86]). Ce type de nuance est également utilisé pour la fabrication des aubes de turbines des centrales nucléaires.

Pour des soucis de réduction de poids, des alliages d'aluminium ont été étudiés. Cependant, lorsque les températures sont très élevées, le comportement mécanique des alliages d'aluminium est mauvais. Finalement, c'est un matériau peu utilisé pour une application au freinage.

Pour des secteurs industriels moins sensibles aux coûts mais sensibles aux performances comme l'aviation ou la voiture de compétition, où les problèmes de coûts sont moindres et les durées d'utilisation plus courtes, d'autres solutions ont émergé, plus onéreuses que la fonte, mais présentant un meilleur comportement thermique. On peut citer par exemple les matériaux composites carbone-carbone. Constitués d'un renfort car-

boné fibreux et d'une matrice de carbone, ils présentent une capacité thermique massique élevée et une dilatation faible. Sont apparus également les disques en céramique, qui ont des capacités thermiques élevées, une bonne résistance mécanique à haute température, des usures faibles. Leur utilisation reste cependant limitée en raison de leur fragilité et de leur faible ténacité. Des conceptions avec des revêtements céramiques semblent plus réalistes. Depuis peu, il existe également des disques composites à matrice métallique qui restent pour le moment au stade de prototypes.

### **1.2.3.2 Les garnitures**

Pour les garnitures, on cherche un matériau qui génère un bon coefficient de frottement (le plus élevé possible et le plus constant possible, quelles que soient les variations de température, de pression ou de vitesse). Il faut cependant souligner que le comportement de friction dépend aussi du matériau qui compose l'autre structure frottante, à savoir le disque, des conditions d'appui de la plaquette, etc. On veut aussi limiter les problèmes d'usure, de corrosion et de bruit (qui est un problème classique de pièces frottantes sur des solides en mouvement). Bien sûr, il y a aussi des contraintes de coût.

Les garnitures sont faites de matériaux dits de friction. Ceux-ci sont composés d'abrasifs et de lubrifiants, d'élastomères, de poudre de métaux et autrefois, d'amiante. Leur composition est souvent mal connue, restant confidentielle chez les équipementiers.

### **1.2.3.3 Les supports**

Les supports sont fabriqués avec un acier doux. Leur rôle est de répartir l'effort exercé par le piston hydraulique sur la totalité de la surface des garnitures, dans le but d'obtenir une surface de contact disque/plaquette la plus large et la plus homogène possible. Cela constitue un des critères de bon fonctionnement du frein.

Le support est la pièce intermédiaire entre les garnitures et le piston. Elle transmet donc la chaleur des garnitures (qui peut être élevée) vers le liquide dans le piston. Afin d'éviter ce phénomène, dont on parlera dans la partie (1.3), on utilise parfois des sous-couches qui servent d'isolant thermique. Ces sous-couches permettent aussi d'absorber une partie des bruits et des vibrations engendrés par le système de frein à disque.

## **1.3 Critères d'évaluation d'un système de freinage**

Le frein à disque doit répondre à différents types d'exigence, dont les principaux sont : l'efficacité de freinage, l'endurance du système et le confort d'utilisation.



### 1.3.1 Efficacité

L'efficacité du frein se mesure par son aptitude à arrêter un véhicule en mouvement, sur une distance minimale, quelles que soient les conditions extérieures. L'effort qui sert à ralentir la rotation du disque doit donc être le plus élevé possible. En d'autres termes, il faut optimiser l'effort tangentiel issu du frottement des plaquettes sur le disque. Ainsi, plusieurs paramètres interviennent : **la pression de contact**, **la surface de frottement** et **le coefficient de frottement**. Plus ces valeurs sont élevées, plus la distance d'arrêt du véhicule est faible.

La **pression de contact disque/garnitures** dépend essentiellement de la pression hydraulique dans le piston. Celle-ci varie entre 0 *bar* et 80 *bars* pour une voiture particulière. La pression de contact dépend aussi de l'état de surface des deux pièces frottantes, de l'usure, des rigidités des matériaux, des dilatations thermiques, etc. Des observations expérimentales faites par Kennedy [49] ont montré que la pression de contact varie continuellement au cours d'un freinage, et ce, même si la pression hydraulique reste constante. Un autre phénomène peut se produire à haute température : lors de freinages longs (type descente de montagne), la température peut atteindre des valeurs élevées et rester à ce niveau suffisamment longtemps pour que la chaleur soit transmise au piston puis au liquide de frein. Celui-ci peut entrer en ébullition (c'est ce qu'on appelle le *vapor lock*). On assiste alors à un phénomène de vaporisation : la phase gazeuse résultante étant compressible, cela entraîne une course de pédale plus longue, à un tel point que l'on peut ne plus arriver à comprimer le piston.

Le **coefficient de frottement**, noté  $\mu$ , doit aussi rester le plus stable possible, afin d'assurer un freinage constant, quelles que soient les conditions de freinage. Or, une fois les matériaux choisis,  $\mu$  va dépendre de la pression de contact, de la vitesse de rotation mais aussi de l'hygrométrie et de la température de fonctionnement. En effet, la valeur de  $\mu$  baisse par temps de pluie. De même, quand la température atteint 400°C environ,  $\mu$  chute brutalement. C'est ce qu'on appelle le *fading*.

Kennedy et Ling [49] pour l'aéronautique puis Day [83] pour l'automobile ont mis en évidence que la **surface réelle de contact** peut être très différente de la surface potentielle de contact (surface totale des garnitures) avec des variations permanentes dues au couplage entre les dilatations thermiques, les pressions de contact et l'usure. Ces investigations ont été menées pour des géométries simples de type annulaire avec l'hypothèse de matériaux à comportement élastique linéaire.

Les valeurs maximales de température de fonctionnement vont donc être un critère majeur pour l'efficacité de freinage. Elles sont engendrées par des freinages à grande vitesse, à forte pression, à longue durée, etc. Le choix des matériaux est aussi essentiel pour le comportement en friction.

### 1.3.2 Confort

Les problèmes de confort rencontrés avec le frein à disque résident dans l'apparition de bruits et de vibrations dans certaines configurations de freinage.

Théoriquement, les vibrations et les bruits sont reliés puisque le bruit est toujours engendré par des vibrations. Cependant, on appelle communément **vibrations** les vibrations qui sont ressenties autrement que par les bruits. Dans le problème du frein, il s'agit principalement des vibrations de la pédale de frein et du volant. Elles sont essentiellement dues aux chocs entre le disque et les plaquettes et sont donc liées à la vitesse de rotation de la roue. Les fréquences de ces vibrations varient de quelques hertz à quelques centaines de hertz.

Les vibrations sont classées en deux catégories, selon leur mode de génération :

- le cold-judder, qui intervient à basse température ;
- le hot-judder qui apparaît seulement à hautes températures et qui est relié à la présence de points chauds ; ces derniers seront décrits ultérieurement.

Le cold-judder est généré par un défaut de variations d'épaisseur du disque (DTV - Disc Thickness Variations). Celles-ci peuvent être d'origine ou engendrées par des défauts d'assemblage, des jeux trop importants, etc. qui induisent un voile du disque. Ce gonflement engendre des irrégularités d'usure du disque.

Le hot-judder est relié à l'apparition de points chauds (qui seront décrits dans la partie (1.4.1) et dont l'origine est encore mal connue). Il apparaît pour des freinages à vitesse élevée mais à pression relativement faible.

Les **bruits** sont générés par les instabilités du frottement des plaquettes contre le disque. Le frottement est donc ce qu'on appelle l'excitation du bruit. Le résonnateur (la pièce vibrante) est le plus souvent le disque, mais il peut arriver que ce soit la plaquette ou l'étrier ou encore une autre pièce de l'assemblage.

On classe les bruits rattachés au disque par intervalle de fréquence :

- le stick-slip qui est un bruit à basse fréquence ( $f < 200 \text{ Hz}$ ) ;
- le squeal qui est un bruit à plus haute fréquence ( $500 \text{ Hz} < f < 3000 \text{ Hz}$ ) ;
- le crissement (ou squeak) qui est également un bruit à haute fréquence ( $2000 \text{ Hz} < f < 5000 \text{ Hz}$ ) mais qui fait intervenir à la fois le disque et les plaquettes. Le crissement peut parfois dépasser les  $120 \text{ dB}$ .

On peut aussi citer le martèlement qui est un bruit généré par les vibrations de certains éléments du train avant, notamment de l'étrier, excités par les instabilités du

frottement disque/plaquettes. Il est perçu dans l'habitacle par un bourdonnement sourd. Il est généré par des freinages à faible décélération et à grande vitesse ( $V > 120\text{km/h}$ ) [44].

Les principaux paramètres du bruit sont : les caractéristiques frictionnelles du couple disque/plaquettes, la géométrie des structures et les liaisons entre les pièces. Le bruit fait l'objet de très nombreuses études ; on peut par exemple citer celle de Drobecq [35] qui propose une modélisation de système de freinage ferroviaire pour l'étude de crissement de frein ou encore celle de F. Moiroit dans le domaine automobile [66].

### 1.3.3 Endurance

Un autre critère d'évaluation d'un frein à disque est son endurance. Plus précisément, il s'agit de garantir dans la durée l'ensemble des fonctions du système, éviter toute avarie dangeureuse et définir un seuil d'usure à partir duquel les pièces doivent être changées. Pour dimensionner un disque de frein, il faut alors connaître les avaries susceptibles d'apparaître. Les observations expérimentales permettent d'établir la liste des endommagements suivants (certains peuvent se manifester sur un véhicule en clientèle, d'autres ne surviennent que lors d'essais sur banc) :

- du faïençage sur les pistes de frottement (*fig. 1.9*) ;
- des fissures radiales sur les pistes de frottement (*fig. 1.10*) ;
- des fissures au pied des ailettes (*fig. 1.11*) ;
- une fissure circulaire (*fig. 1.13*), (*fig. 1.14*) au niveau de la gorge qui peut aboutir à la rupture du disque (*fig. 1.12*) ;
- de l'usure (*fig. 1.15*), (*fig. 1.16*).

Le faïençage est un réseau de micro-fissures surfaciques. Il est typique de la fatigue thermique, c'est-à-dire de la fatigue due à des sollicitations thermiques.

Les fissures radiales, qui peuvent apparaître sur les pistes de frottement du disque, sont d'une longueur proche de 4 à 5 *cm*. Leur nombre varie entre 1 et 3. Le principe de leur émergence est connu. Les élévations de température tendent à faire dilater le disque. Celui-ci peut s'allonger dans le sens radial mais pas dans le sens orthoradial, ce qui génère des contraintes de compression dans le sens orthoradial et même de la plastification dans les zones chaudes. Des zones chaudes peuvent aussi parfois apparaître sous forme de tâches rondes régulièrement espacées sur les pistes (c'est ce qu'on appelle les points chauds qui seront décrits ultérieurement). Ces zones chaudes sont entourées de zones plus froides, ce qui crée aussi des contraintes de compression et des déformations plastiques. Le refroidissement du disque génère alors des contraintes de traction dans les zones plastifiées. Les cycles de contraintes thermiques orthoradiales peuvent alors provoquer la fissuration

radiale du disque. C'est de la fatigue thermique.

Les fissures en pied d'ailettes proviennent aussi des gradients thermiques dans l'épaisseur du disque mais la zone concernée subit aussi un chargement mécanique. Les pressions des plaquettes sur le disque proviennent d'une pression hydraulique qui dépasse rarement les 80 *bars* dans l'automobile. Elles engendrent des contraintes de pression de l'ordre de quelques newtons par millimètre carré, ce qui est très faible. Cependant, lorsque le disque est ventilé, la force de contact ne s'applique que sur la section réduite des ailettes. Les contraintes sont donc multipliées par un facteur proche de 10, ce qui les rend non négligeables, surtout lorsque les températures de fonctionnement sont élevées. En effet, pour la fonte GL, la limite d'élasticité, les limites d'endurance, etc. s'effondrent à partir d'une température voisine de 450°C. Cette pression en pied d'ailettes induit donc des contraintes supplémentaires, qui peuvent être suffisantes pour initier des fissures.

La région de la gorge du bol est aussi très sévèrement sollicitée. En effet, le disque tend à se mettre en cône à cause des dilatations des pistes chaudes, mais ce déplacement est retenu par la présence du bol qui est moins chaud et par celle de l'étrier. De ce fait, de grandes concentrations de contraintes naissent dans cette zone. Lors d'essais très sévères sur banc dynamométrique, on peut parfois voir apparaître une fissure circonférentielle (du côté externe et/ou du côté interne du disque) qui se propage et provoque la rupture brutale du bol.

Enfin, le disque s'use par frottement contre les plaquettes. En réalité, celles-ci sont fabriquées dans l'optique de s'user davantage que le disque (*fig.* 1.18). Le frottement des deux pièces engendre des problèmes de dépôt (*fig.* 1.17) et d'arrachement de matière qui modifient la nature du contact. De nombreuses études portent sur ces problèmes d'usure. Les travaux de Degallaix [23] par exemple abordent le sujet en introduisant la notion de troisième corps. En général, l'usure du disque reste faible par rapport à celle des plaquettes ; mais lorsque le couple disque/garnitures est mal choisi, l'usure du disque peut devenir conséquente. Or, si l'épaisseur des pistes de frottement devient trop faible, il n'y a plus assez de matière pour assurer l'absorption de chaleur. Il faut alors changer prématurément le disque.

Finalement, pour éviter ou diminuer ces avaries, il faut dimensionner le disque (et les composantes externes) de façon à :

- diminuer la température maximale atteinte par le disque pour assurer un comportement mécanique correct du matériau ;
- diminuer les gradients thermiques pour diminuer les contraintes thermiques ;
- éviter toute usure excessive.

en travaillant sur les paramètres suivants :

- le comportement des matériaux ;

- les géométries ;
- l'absorption, la diffusion et la dissipation de la chaleur.



FIG. 1.9: Faïençage sur les pistes de frottement



FIG. 1.10: Fissure radiale sur les pistes de frottement

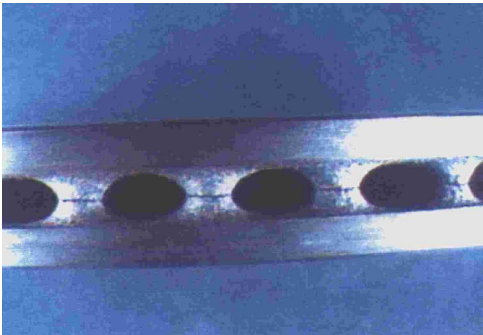


FIG. 1.11: Fissure en pied d'ailette



FIG. 1.12: Rupture dans la gorge du bol

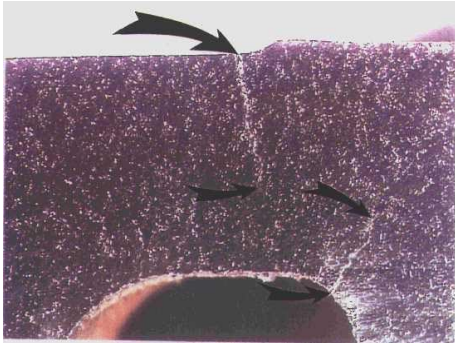


FIG. 1.13: Section de disque fissuré

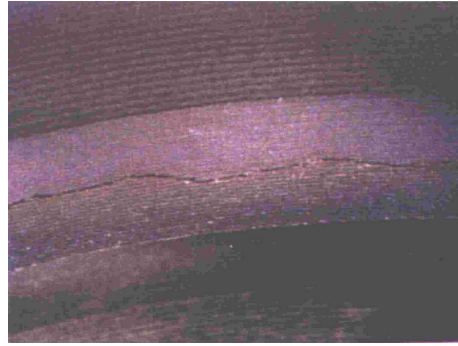


FIG. 1.14: Fissure dans la gorge



FIG. 1.15: Usure des pistes

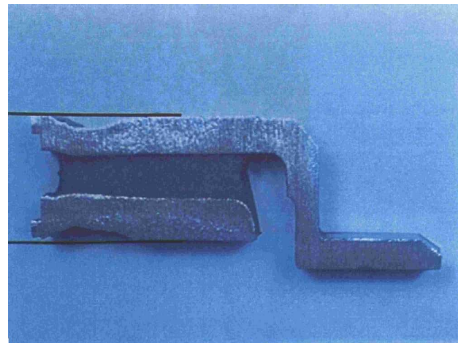


FIG. 1.16: Usure non-uniforme

### 1.3.4 Autres critères

D'autres critères entrent en ligne de compte lors de la conception d'un frein : son coût (matière première, facilité de fabrication, etc.), son encombrement (on veut le réduire au minimum), son poids (plus un véhicule est léger, plus la vitesse maximale est élevée, et plus la consommation de carburant par kilomètre est faible)...



FIG. 1.17: Dépôts de matière sur les pistes du disque



FIG. 1.18: Usure excessive des plaquettes

### 1.3.5 Ordre de priorité selon les domaines d'application

Bien évidemment, les priorités des critères d'évaluation d'un frein varient selon les domaines d'application.

Dans l'aéronautique, l'utilisation des freins reste ponctuelle et limitée aux atterrissages. Les énergies mises en jeu sont extrêmement élevées. En effet, pour une masse de  $M = 200 \text{ tonnes}$ , une distance d'arrêt de  $d = 1300 \text{ m}$ , l'énergie absorbée par un frein est de  $E = 150 \text{ MJ}$ , correspondant à une puissance de  $P = 7 \text{ MW}$ . Il faut donc un frein à forte inertie thermique. Les températures peuvent tout de même atteindre les  $3000^\circ\text{C}$ , ce qui implique des contraintes sur le choix des matériaux. Les problèmes d'efficacité sont bien plus importants que ceux de tenue en service, ou encore de coûts. On note aussi que les freinages sont bien définis.

Dans le secteur ferroviaire, les énergies sont importantes, la vitesse est élevée, mais la pression est faible. Les temps de freinage sont longs de sorte que les phénomènes thermiques ont le temps de se stabiliser (souvent sous forme de points chauds).

Dans le secteur automobile qui nous intéresse, les énergies, si elles sont de plus en plus élevées, restent tout de même bien inférieures à celles rencontrées dans les deux autres secteurs. Par contre, les pressions sont relativement élevées, ce qui induit d'importants gradients angulaires qui sont une source de difficulté d'analyse. Une autre difficulté réside dans le fait que les freinages subis par un disque en service sont mal définis et leur ordre est aléatoire, dépendant entre autres choses, du conducteur. Bien sûr, les priorités pour les concepteurs sont d'abord l'efficacité du freinage et ensuite l'endurance du système et le coût. Le confort prend une importance croissante. Le poids du système de freinage doit rester raisonnable. L'encombrement est une contrainte. **Notre étude portera sur le problème de l'endurance.**

## 1.4 Analyse des phénomènes physiques

Finalement, on retient que les phénomènes causant les avaries décrites précédemment sont de deux types : thermiques (températures élevées, cycles thermiques de grande amplitude et gradients thermiques) et mécaniques (déformations du disque induites par les pressions, les dilatations et les serrages mécaniques).

### 1.4.1 Phénomènes thermiques

Les phénomènes thermiques jouent un rôle fondamental dans le problème du disque. En effet, pour une voiture particulière de masse  $M = 1500 \text{ kg}$  que l'on freine à partir d'une vitesse initiale de  $V = 150 \text{ km/h}$  jusqu'à l'arrêt, la puissance énergétique absorbée par le disque est d'environ  $240 \text{ kW}$ . Cette énergie doit être absorbée par le frein en à peine quelques secondes. Toute la chaleur transmise au disque conduit alors à de très **fortes élévations de température** : celle-ci atteint régulièrement des valeurs proches de  $500^\circ\text{C}$ , et dans des cas de freinage très sévère, elle peut localement atteindre  $700$  ou  $800^\circ\text{C}$ . Dans ces domaines, le comportement mécanique de la fonte change. Il devient visqueux, les limites d'élasticité s'effondrent, ainsi que les limites d'endurance. Les points de transformation de phase peuvent même être localement dépassés. Peuvent aussi survenir des problèmes de vapor-lock : lorsque la température devient trop élevée sur les pistes de frottement, la chaleur peut se transmettre au liquide de frein qui se vaporise en partie. Il y a aussi les problèmes de "fading", c'est-à-dire de perte d'efficacité due à la chute du coefficient de frottement avec la température. Ces observations montrent qu'il est essentiel que le disque puisse absorber beaucoup de chaleur et sache l'évacuer rapidement afin d'éviter des fortes élévations de température. Ainsi, la capacité de refroidissement du disque est un critère fondamental pour son bon fonctionnement et son endurance. C'est ce qui a motivé la fabrication des disques ventilés, ainsi que l'utilisation de plus en plus répandue d'écoques placées devant les freins qui permettent d'apporter continuellement un flux d'air frais. À côté de ces solutions techniques qui permettent de diminuer la température dans le disque, certains problèmes persistent comme celui du couple résiduel. En effet, le rappel des plaquettes est parfois mal assuré par les ressorts de sorte qu'elles restent en contact frottant perpétuel avec le disque. Non seulement, elles s'usent plus vite et génèrent du bruit basse-fréquence, mais aussi, elles maintiennent le disque à une température plus élevée que l'ambiante.

Mais le plus endommageant, ce sont les **gradients thermiques** qui apparaissent dans le disque lors d'un freinage. En effet, le disque tend à se dilater dans les zones chaudes, mais il est finalement "maintenu" par les zones froides. Cela donne lieu à des contraintes de compression avec plastification. Lors du refroidissement, il y a apparition de contraintes résiduelles de traction. Le disque subit donc des cycles de contraintes traction/compression qui s'apparentent à des cycles de fatigue thermique.

Il existe différents types de gradients thermiques :



- les gradients dans l'épaisseur des pistes ;
- les gradients surfaciques (radiaux et surtout orthoradiaux) ;
- les gradients dans la gorge du disque.

L'origine des gradients dans l'épaisseur des pistes est aisément expliquée : le disque est chauffé en surface mais comme la plupart des freinages ne durent que quelques secondes, la chaleur n'a pas le temps de pénétrer dans l'épaisseur du disque. Les températures de surface peuvent atteindre  $500^{\circ}C$  en 4 ou 5 secondes, tandis que le centre des pistes n'atteint qu'une valeur de 100 ou  $200^{\circ}C$ . La température finit par s'homogénéiser avant que de nouveaux gradients apparaissent : pendant le refroidissement, seule la surface refroidit par convection. Elle devient alors plus froide que le cœur. Ces différences de température selon la profondeur provoquent des contraintes circonférentielles de traction ou de compression.

Les gradients dans la gorge du bol s'expliquent de la même manière. En début de freinage, la température du bol est à  $20^{\circ}C$  tandis que celle des pistes est de quelques centaines de degrés. De plus, dans le but d'éviter que la température du moyeu ne soit trop élevée (ce qui engendrerait des élévations de température du pneu, très critique pour son comportement), la gorge est usinée de manière à ne pas transmettre trop de chaleur au bol. Avec cet usinage, la température du bol baisse effectivement, mais les gradients thermiques augmentent conséquemment dans cette zone. Ceux-ci engendrent des contraintes thermiques qui expliquent les ruptures de bol observées lors d'essais expérimentaux sévères.

Les gradients surfaciques (radiaux et orthoradiaux) sur les pistes de frottement du disque ont fait l'objet d'innombrables études. On peut par exemple citer les travaux de D'Cruz et Jimbo qui les ont observés [33][47]. Ces gradients sont en général élevés et variables au cours du temps (pendant un freinage) et ils sont à l'origine de nombreux problèmes (fissures radiales et faïençage, vibrations, bruits).

Les gradients radiaux (c'est-à-dire les différences de températures observées sur un rayon de la piste de frottement) peuvent d'abord être expliqués par le fait que le flux de chaleur  $\phi$  qui entre dans le disque est issu du frottement. Il est donc de la forme :

$$\phi = \mu V P \quad (1.1)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement,  $V$  la vitesse du disque (si on néglige la vitesse relative d'un point matériel par rapport au disque) et  $P$  la pression. Comme on a :

$$V = r\omega \quad (1.2)$$

où  $\omega$  est la vitesse de rotation du disque, le flux dépend directement du rayon. On peut donc s'attendre à ce que la température soit aussi dépendante du rayon. Les gradients thermiques radiaux proviennent aussi des non-uniformités de la pression de contact entre le disque et les plaquettes. Comme nous le verrons ultérieurement, les pressions de contact ne sont pas uniformes sous les plaquettes et varient avec le rayon. Enfin, le coefficient de

frottement  $\mu$  est une fonction de plusieurs paramètres, dont la vitesse et la pression. Il est donc aussi variable avec le rayon. Les gradients thermiques radiaux sont donc très bien expliqués ; beaucoup d'études ont été menées dans le but de les évaluer mais les difficultés demeurent puisque le phénomène dépend de plusieurs paramètres difficiles à prédire (surtout les variations de contact). Parfois, les gradients thermiques se présentent sous forme de "*bandes chaudes*". On les appelle aussi les "*cercles de feu*" (*fig. 1.19*). Il y en a généralement un ou deux par piste de frottement. Ils sont issus des variations de portée de contact garnitures/disque [79][48].

Les gradients thermiques orthoradiaux ont deux origines différentes. Ils ont été observés par Eisengraber [38] ou encore Bailey [5] mais ont été relativement peu étudiés, ou en tout cas, jamais prédits quantitativement. En effet, par leur caractère orthoradial, ils ne peuvent être déterminés que par des analyses tridimensionnelles, trop complexes et lourdes à mettre en œuvre numériquement par des méthodes classiques. Le développement d'algorithmes eulériens présentés dans le chapitre (2) permet alors d'aboutir à des prédictions quantitatives de ces gradients.

La première cause de ces gradients réside dans le fait que le disque n'est chauffé que par intermittence. Quand un élément de surface du disque passe sous les plaquettes, ou plus précisément dans la zone de contact effective, qui est différente de la surface totale des plaquettes, il reçoit le flux de chaleur issu du frottement. Quand il s'en éloigne, il se retrouve à l'air libre et peut donc refroidir par convection. Ainsi, la piste de frottement est plus chaude en sortie de plaquette et plus froide en entrée. Cela induit des gradients thermiques orthoradiaux. Pour des freinages dits d'arrêt (freinages pour lesquels la vitesse du disque décroît d'une valeur initiale jusqu'à 0 *km/h*), les gradients sont de l'ordre de 50°C. Cette valeur varie légèrement au cours du temps et dépend de plusieurs paramètres dont la vitesse de rotation. Plus la vitesse est élevée, et plus le gradient est faible, puisque le temps passé loin des plaquettes est court. Dans les freinages à vitesse constante (suffisamment élevée), le gradient est plutôt faible.

La deuxième cause provient de ce qui est communément appelé "*points chauds*" (ou encore "*hot spots*"). Ce sont des zones rondes de taille variable, où la température est plus élevée qu'ailleurs et qui n'apparaissent que dans certaines configurations de freinage. Ces zones chaudes sont régulièrement espacées sur les pistes de frottement mais leur position et leur intensité varient au cours du temps. Elles ont été observées dans le domaine aéronautique en 1975 par Santini et Kennedy [79] puis dans le domaine ferroviaire par Wentenkamp [87] et Dow [34]. Une première description de ces hot spots observés dans l'automobile a été faite par Anderson et *al.* Il propose une classification des points chauds en quatre catégories selon leur taille, leur température et leur cause [3]. Les différents types sont :

- les aspérités ou les rugosités ("*asperity*") ;
- les TEI ("*Thermo Elastic Instabilities*") et leur forme atténuée : les bandes chaudes ("*focal*") ;

- les défauts géométriques ("distortional") ;
- les déformations thermiques de l'ensemble du disque ("regional").

#### Aspérités ou rugosités :

Il s'agit de points chauds de très petite taille ( $\leq 1mm$ ) correspondant à ce qu'on appelle des températures flash (élévations de température brutales et brèves). Leurs apparitions et leurs positionnements sont aléatoires car ils proviennent des instabilités de la dilatation, du contact et de l'usure dues aux aspérités du disque et des garnitures de plaquettes. Ils ne laissent pas de trace après freinage, contrairement aux points chauds macroscopiques. Ils relèvent principalement de la tribologie.

#### Focal :

Il s'agit de points chauds d'environ 5 à 20 *mm* de diamètre qui sont générés par des zones de contact réduites issues des dilatations et de l'usure. Parfois, la température atteinte dans ces points chauds est suffisamment élevée pour induire des transformations de phase pendant le freinage. Il y a alors formation de martensite durant la phase de refroidissement. Or la martensite occupe un volume légèrement supérieur, ce qui provoque au prochain freinage des élévations locales de température. Il peut alors apparaître des fissures sur les bords de ces points chauds. Certains points chauds de type "focal" n'engendrent pas de formation de martensite car la température n'est pas assez élevée ; ils ne sont alors pas plus endommageants que d'autres gradients.

#### Distortional :

Ils apparaissent sous forme soit de bandes chaudes, soit de points chauds de 20 à 100 *mm* de diamètre. Ces zones chaudes sont due au flambement thermique du disque (mise en cône du disque, gondolement des pistes).

#### Regional :

Ce sont des zones chaudes d'environ 50 à 200 *mm* de longueur. Elles correspondent à des gradients thermiques faibles et très diffus associés à des inégalités des surfaces de refroidissement.

Une autre classification a été proposée par Dufrenoy dans le domaine ferroviaire, assez proche de cette classification mais qui semble plus judicieuse [37]. Elle comporte les groupes suivants (*fig. 1.19*) :

- les aspérités ;
- les zones sur cercles chauds ;

- les cercles chauds ;
- les points chauds macroscopiques ;
- les gradients de diffusion.

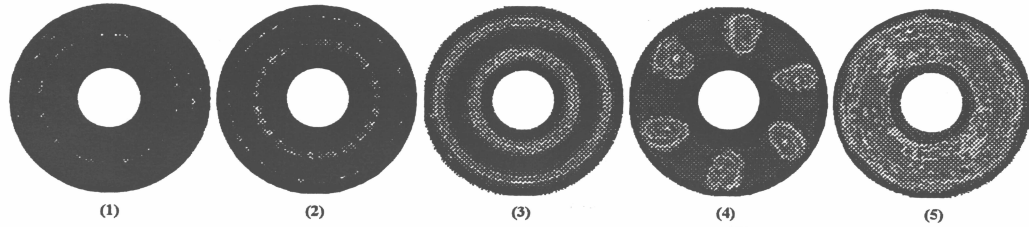


FIG. 1.19: classification des points chauds selon Dufrenoy

Les aspérités et les gradients de diffusion correspondent exactement aux deux mêmes catégories de Anderson. Les bandes chaudes (ou cercles chauds) correspondraient à des variations de portée des garnitures. Les points chauds macroscopiques correspondraient à des déformations globales de la structure et se rapprocheraient du troisième type de points chauds de Anderson. Les zones plus chaudes qui peuvent apparaître sur les cercles chauds sont proches du second type de points chauds selon la classification de Anderson. Elles semblent être liées à des instabilités de dilatations (TEI locales) et d'usure. Elles sont aussi aléatoires. Dufrenoy met plus l'accent sur les points chauds macroscopiques, plus fréquents en ferroviaire, étant donné les importantes énergies mises en jeu et les temps de freinage plus élevés que dans l'automobile. En effet, ces points chauds sont créés par des processus qui prennent un peu de temps à se former.

De manière générale, on appelle "points chauds macroscopiques" ceux qui sont largement étudiés par les spécialistes du frein et qui, selon les auteurs, sont classés parmi les points chauds de type "focal" ou "distortional". Ces points chauds macroscopiques sont les plus étudiés car ils sont très endommageants. En effet, dans ces zones chaudes, les élévations de température sont parfois supérieures à  $900^{\circ}\text{C}$ . Il y a donc formation d'austénite pendant le freinage puis de martensite pendant le refroidissement. On peut facilement observer après refroidissement des tâches rondes qui correspondent aux zones transformées. Ces points chauds donnent lieu à des fissures, ce qui explique l'intérêt de leurs études.

Plusieurs explications sur la formation de ces points chauds existent. Celle avancée par Barber est de relier ces points chauds macroscopiques à des mécanismes d'instabilités thermoélastiques, qu'il note brièvement TEI [7]. Ces instabilités résultent de la dynamique de friction entre deux corps en contact avec mouvement relatif. Le mécanisme est le suivant : localement, la surface de contact effective est réduite aux aspérités majeures. Les élévations de température sont donc supérieures dans ces zones de contact. Elles engendrent des dilatations qui vont amplifier la non-uniformité du contact. Mais dans un

même temps, le frottement va favoriser l'usure dans cette zone. Le contact évolue donc selon la dynamique de dilatation due à l'échauffement et à l'usure. C'est ce mécanisme instable de couplage thermomécanique qui engendre la formation de TEI. Le travail de Barber consiste à supposer leur existence initiale par l'introduction d'une pression sinusoïdale simulant des défauts réguliers. Il calcule ensuite les conditions de continuité d'existence et de développement de ces défauts par une formulation analytique. Les paramètres principaux sont la vitesse de frottement relative et les caractéristiques matériaux des structures [54]. Par la méthode de perturbation, Burton [12] a proposé une évaluation de la vitesse de frottement critique pour que deux demi-plans infinis aient un contact instable. La valeur qu'il a obtenue semble surestimer la valeur réelle dans le cas du frein. Lee et Barber ont alors proposé l'étude d'une couche infinie glissant entre deux demi-plans, problème qui s'apparente mieux à celui du disque de frein. Leur étude a permis de mieux estimer la vitesse critique de glissement. Différentes analyses tendent à améliorer le calcul.

Dufrenoy avance une autre explication. Pour lui, les cercles chauds sont bien dus à des variations de portée de contact. Il les lie donc aux TEI décrits par Barber. Par contre, il propose une autre explication pour les points chauds. Les observations expérimentales montrent que ces points chauds sont régulièrement espacés angulairement et sont antisymétriques. Si sur la piste interne du disque, il y a un point chaud, sur la piste externe, il y a une zone comprise entre deux points chauds. Cette distribution antisymétrique des points chauds pousse Dufrenoy à relier leur formation à un problème de flambement ou de comportement structural global entraînant des déformations permanentes compatibles avec leur caractère stabilisé.

On peut aussi citer les travaux de Kao [48] pour qui les bandes chaudes s'apparentent aussi à des mécanismes de type TEI. Pour les points chauds, les distributions antisymétriques de la température qui apparaissent dans certains types de freinage induisent un gondolement du disque, qui favorisent encore plus la distribution antisymétrique de la température. Le flambement du disque engendre une variation du couple. C'est ce mécanisme qui crée les points chauds, et qui par la même occasion crée des vibrations du type hot-judder. Kao remarque que le nombre de points chauds est le même que celui de pics de flambement. Il appelle ce mécanisme le "Thermoelastic unstable buckling".

### 1.4.2 Phénomènes mécaniques

Les "phénomènes" mécaniques peuvent être classés en trois catégories :

- le chargement (pression et couple), les conditions aux limites (serrage du disque sur le moyeu, contact avec la jante, présence de l'étrier) et la géométrie du disque qui donnent la déformation globale du disque ;
- le contact entre le disque et les plaquettes ;
- l'usure.

Le **chargement mécanique** réside dans la pression des plaquettes sur le disque et le couple issu du freinage. Les efforts d'inertie sont négligeables. Ce chargement engendre d'une manière générale des contraintes négligeables par rapport aux contraintes thermiques. En effet, la pression hydraulique est de quelques dizaines de bars ; les contraintes de compression sur les pistes de frottement sont de l'ordre de quelques mégapascals seulement. Cependant, comme il a été expliqué antérieurement, sur un disque ventilé, ces efforts de pression peuvent engendrer des concentrations de contraintes en pied d'ailettes (quelques dizaines de mégapascals). Ces contraintes peuvent devenir endommageantes car elles s'ajoutent aux contraintes thermiques. Quand la température est élevée, les limites de fatigue ou d'endommagement sont faibles et quelques dizaines de mégapascals peuvent faire la différence.

Le chargement mécanique joue aussi un rôle dans les déformations globales du disque, en même temps que les **conditions aux limites** et la **géométrie** du disque. En effet, étant donné la dissymétrie du disque due au raccordement des pistes au bol et le fait que les pistes soient plus chaudes que le bol, le disque va naturellement prendre la forme d'un cône - c'est ce qu'on appelle la mise en cône du disque (*fig. 1.20*). De plus, la piste qui est raccordée au bol refroidit plus vite que l'autre piste car la chaleur peut se diffuser dans le bol. La dissymétrie de dilatations engendrée favorise encore la mise en cône. Cette dernière est aussi facilitée par la flexibilité de la gorge donnée par son usinage. On rappelle que cet usinage a pour but d'éviter une montée en température excessive du porte-moyeu. Ce mouvement "naturel" du disque est cependant retenu par la présence de l'étrier qui tend à garder les pistes du disque parallèles à leur position de départ, du moins, quand elles passent sous les plaquettes. L'étrier et les plaquettes peuvent toutefois pivoter légèrement et permettre une petite mise en cône du disque. La zone de la gorge du bol est donc très sollicitée mécaniquement ; aux contraintes mécaniques, il faut ajouter celles générées par les gradients thermiques, très importants dans cette zone. Il s'agit donc d'une zone extrêmement critique : plus elle est fine, plus le disque est flexible et plus la température du moyeu est faible. Par contre, elle perd en rigidité et les gradients thermiques sont plus importants.

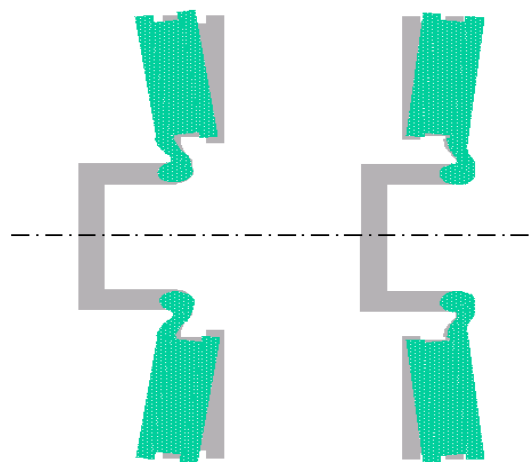


FIG. 1.20: Mise en cône d'un disque de frein

Le **contact** est aussi un "ingrédient" primordial à l'origine des avaries du disque. En effet, les instabilités du coefficient de frottement et de la pression de contact engendrent des gondlements du disque qui provoquent des gradients thermiques et les problèmes qui en découlent et qui ont été évoqués dans la partie précédente. On rappelle que les instabilités du contact proviennent :

- des rugosités des surfaces en contact ;
- des variations initiales d'épaisseur du disque (DTV) dues à un mauvais rodage ;
- des pivotements de la plaquette ;
- des dilatations non uniformes du disque et de la plaquette (elles-même dues aux non-uniformités de contact) ;
- des variations du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement, la température, la pression de contact ;
- des irrégularités d'usure dues à toutes les instabilités citées dessus et aux éventuelles irrégularités de dureté du matériau s'il a subi des transformations locales de phase (martensite) ;
- des déformations du disque dues au flambement...

On voit donc que les variations du contact, très importantes dans l'enchaînement des phénomènes, sont extrêmement difficiles à prédire quantitativement. Elles ont souvent été observées et étudiées dans la mesure du possible [83]. On note l'importance du rôle joué par l'étrier dans la nature du contact disque/garniture.

Enfin, le dernier phénomène mécanique endommageant est l'**usure**. En réalité, ce sont surtout les plaquettes qui s'usent. Elles peuvent laisser des dépôts sur le disque, donnant lieu à ce qui est parfois appelé le "troisième corps", qui modifie les conditions de contact. L'usure est un phénomène à part entière qui ne sera pas traité dans notre étude.

Finalement, notre étude aura pour objectif de proposer une méthode qui permet de prédire le comportement du disque en terme de tenue en service. L'étude bibliographique de ces phénomènes montre que leur prédiction commence par celle du comportement thermomécanique du disque. La première étape de l'étude consiste donc à mettre en œuvre une méthode numérique qui permet la simulation thermomécanique d'un freinage. L'analyse des résultats numériques permettra ensuite l'étude des endommagements et leur prédiction.

## 1.5 Enjeux et difficultés de l'étude

### 1.5.1 Enjeux

Le but de notre travail est de garantir la tenue en service du disque de frein. Afin de prédire par le calcul les endommagements subis par un disque de frein, il faut d'abord faire l'étude physique de ces endommagements, afin de comprendre les mécanismes mis en jeu. Ensuite, chaque type d'endommagement doit faire l'objet d'une étude globale, dans le sens où il ne sert à rien d'étudier, par exemple, le comportement en fatigue du matériau si l'on ne sait pas identifier les cycles de sollicitations imposés à la structure. La prédiction des endommagements ne peut en général pas se faire d'une façon analytique. Il faut donc mettre en place des méthodes numériques pouvant simuler les phénomènes en question.

### 1.5.2 Multiplicité et couplage des phénomènes

L'étude bibliographique du problème montre que la première difficulté réside dans la multiplicité des endommagements subis par le disque (fissures radiales, rupture, usure, etc., *partie* (1.3.3)). Ces endommagements ont des causes diverses ; ils apparaissent dans des situations diverses et sont de gravités différentes. Ainsi, l'usure du disque ne sera pas étudiée. C'est un problème un peu à part, dont l'importance varie selon la nature des plaquettes de frein utilisées avec le disque. On considère de plus que l'usure des disques pose moins de problème que l'endommagement par fissuration. De même, le faïencage et les fissures en pied d'ailette sont des endommagements moins graves que les fissures radiales et la rupture du bol. Ce sont donc sur ces deux derniers problèmes que notre étude portera.

L'étude des phénomènes mis en jeu, présentée dans la *partie* (1.4), montre leur multiplicité et la difficulté d'étude qui en découle. Non seulement beaucoup de facteurs entrent en jeu, mais aussi beaucoup de couplages. En effet, la thermique est dépendante du problème de contact entre le disque et les plaquettes. Inversement, les dilatations modifient la nature du contact. De la même façon, le contact joue le rôle de chargement mécanique subi par le disque et donc a une influence directe sur la réponse mécanique du disque. Inversement, les déformations globales du disque peuvent déplacer les zones de contact. Les couplages thermomécaniques sont aussi nombreux : les gradients thermiques ainsi que les dilatations génèrent des contraintes thermiques qui s'ajoutent aux contraintes mécaniques. Les déformations plastiques subies par le disque dissipent de façon irréversible de la chaleur. Les variations de contact induites par la mécanique modifient également le flux de chaleur entrant dans le disque... La prédiction des phénomènes passe donc par la quantification de ces couplages.

Enfin, la multiplicité et les interactions diverses entre les phénomènes thermomécaniques ne facilitent pas la compréhension des mécanismes qui mènent aux endommagements du disque. Chaque type d'avarie correspond à un ou des mécanismes d'endommagement : fissuration par fatigue thermique, fissuration par fatigue thermomécanique,



mécanique de la rupture... Par exemple, la formation des points chauds reste un point très discuté.

Les phénomènes étant multiples, les échelles le sont également. Il faut déterminer l'échelle ou les échelles d'étude. On sait que les déformations globales, la géométrie du disque ont une forte influence sur sa réponse thermomécanique. Notre étude se fera à l'échelle de la structure. Il faudra toutefois réfléchir dans quelles mesures les phénomènes dans les autres échelles doivent être pris en compte (rupture au niveau du grain, transformation de phase...).

### 1.5.3 Globalité d'une étude

Pour chaque type d'endommagement identifié, il est nécessaire de faire l'étude de l'ensemble des phénomènes qui gouvernent son initiation et son développement jusqu'à la ruine de la structure. Ainsi, pour chaque type d'endommagement, il faut :

- faire l'étude du comportement thermomécanique des **matériaux** dans le contexte de la structure (même gamme de température, même niveau de chargement, etc.).
- faire l'étude de ce type d'endommagement sur éprouvette, toujours dans un contexte représentatif de la structure.
- mettre en place des outils de simulation numérique qui, s'appuyant sur les modèles de comportement et d'endommagement, permet de calculer de façon prédictive la tenue en service des disques.
- analyser l'ensemble des sollicitations clientèles pour définir un cahier des charges et un critère d'acceptation associé. Une difficulté vient du fait que le disque doit être dimensionné pour résister à tout "type" de conduite (agressive, douce, etc. ), de route (autoroute, route nationale, route boueuse, etc.) ou encore d'environnement (pluie, canicule, etc.). De plus, l'enchaînement des différents types de freinage est complètement arbitraire.

Le travail de cette thèse consiste à proposer une méthode qui permette d'effectuer les trois premières étapes de l'analyse des endommagements. La dernière partie de l'approche globale de dimensionnement revient aux ingénieurs automobiles.

## 1.6 Les approches existantes et leurs insuffisances

### 1.6.1 Difficultés de la simulation numérique

L'expérience montre que pour un même freinage (c'est-à-dire pour une même vitesse de rotation, une même inertie, une même pression hydraulique), deux disques de géométrie différente mais de même matériau peuvent rompre à deux endroits différents. Cette remarque, très banale, montre que la géométrie du disque est un paramètre essentiel du dimensionnement. Une méthode purement analytique ne permettrait pas de prendre en compte la géométrie exacte du disque dans le but d'une prédiction quantitative. La méthode de résolution par éléments finis s'impose très naturellement.

La simulation numérique d'un freinage est une étape majeure du dimensionnement du disque de frein. Elle présente de nombreuses difficultés. En effet, non seulement elle doit pouvoir simuler des freinages de types très différents (freinages courts à vitesse élevée, freinages très longs à faibles pressions, etc.) mais en plus, elle doit répondre aux exigences suivantes :

- La modélisation doit être tridimensionnelle, non-axisymétrique. En effet, ni la structure, ni les conditions aux limites, ni le chargement ne sont axisymétriques.
- Le chargement est mobile par rapport à la structure étudiée. Il faut prendre en compte la rotation des plaquettes par rapport au disque.
- La gamme des températures de fonctionnement est très large (de  $20^{\circ}\text{C}$  à  $700^{\circ}\text{C}$ ). Cela engendre de forts niveaux de contraintes et de fortes dépendances du comportement du matériau par rapport à la température. En effet, le comportement n'est pas élastique ; des phénomènes visqueux apparaissent. De plus, les paramètres des lois qui modélisent le comportement deviennent fortement dépendant de la température.
- Les temps de freinages sont très souvent trop courts pour que la réponse thermique du disque ait le temps d'atteindre un état stationnaire. La simulation thermique doit être transitoire.
- Les gradients thermiques sont très élevés, dans l'épaisseur du disque, sur les pistes de frottement, dans la gorge du bol. On s'attend à des gradients de contraintes élevés dans ces mêmes zones. Le maillage doit donc être assez fin pour bien évaluer les gradients. Cela augmente le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis.
- Les échanges de chaleur entre les différentes pièces sont difficiles à quantifier (quelle est la part d'énergie qui entre dans le disque, dans les plaquettes, etc.)
- Les conditions aux limites thermiques sont difficiles à modéliser (échanges convectifs, rayonnement du disque, circulation d'air autour du disque, etc.)
- La modélisation doit prendre en compte le contact avec frottement entre le disque et les plaquettes. Ce contact induit une distribution de pression non-uniforme, variable au cours du temps, dépendant des éléments extérieurs (supports métalliques, étrier,

etc.), des variations du coefficient de frottement, de la température, de la formation ou non de points chauds, de la variation d'épaisseur de disque (DTV), etc.

- Le comportement mécanique de la fonte est anélastique dans les domaines de sollicitations du disque. Cela implique une résolution non-linéaire du problème numérique avec gestion de déformations permanentes du disque.
- Le disque subit des cycles de chargements qui induit des cycles de déformations plastiques avec un phénomène d'”adoucissement” cyclique.
- Les conditions aux limites mécaniques doivent être modélisées fidèlement (du moins leurs effets), sachant qu'elles mettent en jeu des pièces autres que le disque (étrier, moyeu, etc.)
- L'usure des pièces frottantes modifie la nature du contact et peut même modifier la rigidité du disque si celui-ci est trop usé.
- La modélisation numérique doit prendre en compte les nombreux couplages (thermique/contact/mécanique/usure/vibrations, etc.) déjà évoqués.

On s'aperçoit qu'outre des difficultés théoriques (comment modéliser numériquement le comportement du matériau ; comment quantifier les proportions de chaleur entrant dans le disque ; comment modéliser les variations d'épaisseur initiale du disque...), des problèmes de temps de calcul et d'espace mémoire apparaissent très vite. En effet, une modélisation qui se voudrait ”parfaite” tiendrait compte de tous les couplages et de toutes les non-linéarités et s'appliquerait à un maillage de disque très fin. C'est une modélisation irréaliste, par la complexité des modèles et des identifications des paramètres, ainsi que par les temps de calcul. Les analyses numériques du disque de frein doivent donc reposer sur des simplifications de modèle.

## 1.6.2 Les hypothèses classiques

Une des plus grandes difficultés de la simulation du disque réside dans le fait que le problème est tridimensionnel. La structure (qui peut être considérée comme axisymétrique si le disque est plein, mais seulement cyclique si le disque est ventilé) est en rotation et le chargement est localisé sous les plaquettes, sur un secteur angulaire du disque seulement. Cet état de fait impose de très grandes difficultés numériques et donc, les modèles sont la plupart du temps **bidimensionnels ou tridimensionnels axisymétriques**. On peut par exemple citer les analyses de Hennequet Gonzalo [44] ou encore de Cohen et Sprimont [21], de Sakamoto [76], de Pommier [74] ou de Dufrenoy [37]. De même, à PSA, les calculs actuels sont basés sur des modèles 3D d'un secteur angulaire du disque, avec donc, l'hypothèse d'axisymétrie. Ces modèles supposent donc que le **flux thermique** qui entre dans le disque est **circulaire**. Cette hypothèse est bien sûr fausse. Pour s'en débarrasser, Righes G. et Calderale P.M. [75] proposent un calcul thermique bidimensionnel du disque où la valeur du flux thermique entrant est simultanément positive ou nulle, selon que la section

2D modélisée est supposée passer sous les plaquettes ou refroidir par convection. Toutefois, cette méthode ne permet pas d’appréhender tous les phénomènes circonférentiels, et surtout les gradients thermiques orthoradiaux. Finalement, ces modèles 2D ou axisymétriques ne permettent que l’évaluation d’une température moyenne du disque ; ces approches ne sont souvent pas suffisantes pour l’étude des phénomènes conduisant aux endommagements.

Les mêmes difficultés se rencontrent dans l’analyse mécanique du problème. De ce fait, certaines analyses négligent dans le calcul mécanique de la structure, le chargement mécanique dû aux plaquettes de frein et certaines conditions aux limites mécaniques. Par exemple, Cohen [21] effectue le calcul thermique d’un secteur angulaire suivi d’un calcul de déformée thermique. Le raisonnement suivi est de supposer que les contraintes dues à la pression des plaquettes sont négligeables devant celles issues des chargements thermiques car il y a un facteur proche de 20 entre les deux types de contraintes. Nous verrons que cette hypothèse n’est pas pertinente dans le cas des disques ventilés. De plus, négliger les effets des plaquettes (et de l’étrier) revient à négliger les **déformations globales** de structure du disque, qui engendrent des contraintes mécaniques dans le bol, en général supérieures aux contraintes mécaniques sous les plaquettes. Or, Sakamoto [76], sur un modèle axisymétrique, obtient des contraintes thermiques maximales dans la gorge du bol. Comme les températures sont élevées, les limites d’élasticité, de rupture ou d’endommagement sont faibles. Les quelques mégapascals issus des contraintes mécaniques dans le bol ne sont plus négligeables dans cette zone critique.

Une autre hypothèse communément faite, est de supposer les **chargements** mécaniques (effort de pression des plaquettes sur le disque) et thermiques (flux entrant dans le disque issu du frottement) **uniformes**. Dans les modèles 2D ou axisymétriques, ils sont déjà supposés constants dans la direction orthoradiale. L’hypothèse d’uniformité consiste à supposer que la pression et le flux thermique s’appliquent sur toute la surface des plaquettes, avec une valeur constante, indépendante non seulement de l’angle mais aussi du rayon. On peut par exemple citer les travaux de Missoori [65]. De nombreuses études montrent pourtant que le **contact** n’est effectif que sur une portion de surface de plaquette. Donc le flux thermique est également restreint à cette surface effective. Cette surface évolue d’ailleurs au cours d’un freinage car elle dépend de nombreux facteurs tels que les dilatations thermiques, les déformations mécaniques dues au chargement, l’usure, les variations d’épaisseur de disque, le coefficient de frottement, etc. De nombreux auteurs ont toutefois mené des études visant à évaluer la nature du contact. Par exemple, Kennedy et Ling [49] ont étudié le frottement sous des conditions de contact glissant à hautes énergie et ont mis en évidence que la surface effective est en effet différente de la surface des plaquettes. Tirovic, Day [83] ont étudié l’influence de certains paramètres comme la valeur du coefficient de frottement  $\mu$  ou la rigidité de l’étrier sur la distribution de pression sous les plaquettes. Ces études numériques du contact sont nécessaires car, comme il a été noté dans la partie (1.4.2), les distributions de pression et de flux de chaleur conditionnent fortement celle des gradients thermiques radiaux et orthoradiaux. Or il est impossible de mesurer le contact en dynamique. On ne peut évaluer les pressions de contact qu’en statique. Il existe pour cela différentes méthodes : celle du ”pressure

sensitive paper” (utilisée par Dubensky [36]) ou celle du ”ball pressure method” (utilisée par Tumbrink [85]).

L’**usure** des matériaux est rarement modélisée. On peut citer les travaux de Day et Newcomb [31] qui ont intégré l’usure des garnitures, ou ceux de Dufrenoy [37] qui a intégré un calcul d’usure basé sur le modèle d’Achard. Ces modèles restent relativement simples.

Les **couplages** sont simplifiés. Les analyses prennent toujours en compte les élévations de température pour le calcul des contraintes, mais les dissipations mécaniques sont toujours négligées. Certaines études commencent à simuler le couplage dilatations/contact.

Enfin, les **lois de comportement** restent très simples. Par exemple, Mazet [64], dans l’aéronautique, utilise une loi élastique linéaire pour modéliser le comportement du multi-disque en composite carbone-carbone alors que les températures peuvent atteindre des valeurs de plus de  $2000^{\circ}C$ . Il est clair qu’à ces températures, la structure plastifie mais les temps de calcul correspondant au modèle éléments finis ne permettent pas d’envisager la programmation d’une loi non linéaire. Finalement, le modèle 3D thermomécanique de Mazet, avec une loi de frottement qui prend en compte les variations du coefficient de frottement, est trop complexe pour introduire une loi de comportement anélastique, bien que la rotation des disques ne soit pas simulée.

### 1.6.3 Exemples d’étude dans le domaine ferroviaire

Dans le domaine ferroviaire, **Dufrenoy** [37][71] propose un modèle thermique (2D pour le disque plein puis 3D axisymétrique pour le disque ventilé) couplé avec un calcul de contact et d’usure. Le comportement du matériau est élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire avec variation des coefficients avec la température. La méthode des imperfections qui suppose l’existence d’une courbure initiale des pistes est utilisée afin de retrouver par le calcul les bandes chaudes. La position et la largeur des zones de contact initial sont déduites des essais expérimentaux. Cette approche rend la simulation numérique dépendante des essais ; par conséquent, elle ne peut pas être prédictive. Il justifie son modèle axisymétrique en faisant la comparaison entre un calcul où le flux imposé est uniforme sur la circonférence du disque et un calcul où le flux est simultanément positif puis nul. Il trouve une différence de température de 5% sur un tour de disque et conclut sur la ”validité” de l’hypothèse. Mais, comme il le mentionne lui-même, cette différence n’est évaluée que sur le premier tour de disque, quand la vitesse est très élevée, ce qui réduit les gradients thermiques orthoradiaux. De plus, la longueur de contact peut être plus réduite qu’elle ne l’est sur ce calcul, ce qui doit accentuer encore les gradients dans le disque. On peut toutefois noter que l’hypothèse d’axisymétrie est plus acceptable dans le secteur ferroviaire que dans celui de l’automobile car les décélérations sont plus faibles.

Toujours dans le domaine ferroviaire, **Abdi R. El et H. Samrout** [1] font l’étude

des disques de frein de TGV, fabriqués avec un acier faiblement allié trempé et revenu à haute limite d'élasticité. Leur modèle est également bidimensionnel et repose sur les résultats thermiques de Dufrenoy. Ainsi, un flux de chaleur est injecté uniquement sur les rayons correspondant aux positions des bandes chaudes observées sur le disque lors des essais. La largeur des bandes est également une donnée du modèle. Leur modèle thermomécanique découplé appliqué à un petit maillage composé de 900 nœuds environ permet la programmation d'une loi de comportement plus complexe. Ainsi, l'acier a un comportement viscoplastique avec un écrouissage cinématique isotrope non linéaire. La relative rapidité des calculs permet de soumettre le disque à plusieurs cycles thermiques et d'effectuer le calcul mécanique jusqu'à obtention de la stabilisation de la boucle d'hystérésis  $(\sigma, \epsilon)$  au point le plus chaud. Ensuite, pour mettre en évidence l'effet de la multitude de freinages subis par un disque au cours de sa vie, plusieurs cycles combinés de freinages (un freinage d'urgence avec deux freinages d'arrêt "normaux") sont simulés. La réponse stabilisée du disque est comparée à celle obtenue avec le cycle de freinage unique. Les résultats montrent clairement une dépendance de cette réponse stabilisée par rapport au cycle de freinage imposé. On remarque que les calculs thermiques d'Abdi donnent des valeurs de température plus élevées que celles mesurées par un thermocouple frottant en début de freinage. Ceci s'explique par le temps de réponse du thermocouple. Par contre, en fin de freinage, cette tendance s'inverse : la température issue du calcul est plus faible que la température mesurée. Cette inversion s'explique par le fait qu'en fin de freinage, la vitesse de rotation est plus faible, ce qui allonge le temps de refroidissement hors de la zone des plaquettes. Les variations angulaires de la température sont donc plus importantes. Or c'est en fin de freinage que les températures maximales sont atteintes. L'hypothèse d'un modèle axisymétrique est donc plus discutable pour cette période du cycle.

#### 1.6.4 Exemples d'étude dans le domaine automobile

On voit donc que l'hypothèse d'axisymétrie tend à sous-estimer les élévations de température. Dans le domaine automobile où les vitesses sont en moyenne plus faibles que dans le ferroviaire et les pressions plus élevées, les gradients thermiques observés sont trop importants pour être négligés dans une simulation prédictive. En effet, Tirovic et Day ont observé des gradients orthoradiaux proches de 70 degrés sur un disque de frein automobile. Un modèle 3D non-axisymétrique est alors proposé par **Vallet, Dubourg** [86][39][40] pour la simulation d'un disque de frein de poids lourd. Leur travail part de la constatation suivante, faite par Kennedy : lors de la résolution de l'équation de chaleur par la méthode des éléments finis, des instabilités numériques peuvent apparaître quand la vitesse de déplacement du chargement est très élevée. Pour éviter ces phénomènes, il faut travailler avec des incréments de temps petits et la taille des mailles doit aussi être petite. Kennedy a pu mettre en évidence l'apparition d'oscillations pour des nombres de Péclet supérieurs à 2. On rappelle que l'expression du nombre de Péclet est  $P_e = \frac{V\Delta x}{\gamma}$ , où  $\gamma$  est la diffusivité de l'élément du maillage ayant la plus petite dimension. Dans le cas d'un disque de frein automobile, on obtient une taille de maille de l'ordre du micron ! Pour remédier à ces difficultés, une méthode numérique est proposée. Elle consiste à appliquer une transformée de Fourier sur l'équation de chaleur selon la variable  $\theta$ , angle du

point calculé dans un repère cylindrique fixe [50][39]. Cette méthode est notée brièvement "FFT-FEM" (Fast Fourier Transformation-Finite Element Method). Cette décomposition permet de résoudre le problème en effectuant  $n$  calculs 2D au lieu d'un calcul 3D,  $n$  étant le nombre d'harmoniques de la décomposition de Fourier. Le calcul montre que, dans le problème du disque, vingt harmoniques suffisent à donner une bonne évaluation de la réponse thermique. Le gain en terme de temps de calcul est donc très appréciable. Cette méthode FFT-FEM permet d'injecter un flux thermique non-axisymétrique, et de faire une simulation 3D transitoire avec prise en compte de la rotation du disque avec des temps de calcul à peu près raisonnables. Par contre, la structure doit impérativement être axisymétrique. C'est le cas du disque plein mais pas celui du disque ventilé. Pour traiter ce dernier, une méthode mixte a été développée, dans laquelle la structure est décomposée en plusieurs parties. Les zones du disque où les gradients orthoradiaux sont supposés élevés sont d'abord traitées avec la méthode FFT-FEM. Les zones du disque où l'on suppose que les gradients orthoradiaux sont négligeables sont ensuite traitées par un calcul FEM. Les différents sous-ensembles ont bien sûr des nœuds en commun. Les températures issues des calculs FFT-FEM sont données comme conditions aux limites des parties traitées par FEM. Les valeurs aux nœuds obtenues par le calcul FEM sont les conditions aux limites des parties FFT-FEM à l'incrément suivant. Pour le disque de frein, les pistes de frottement sont traitées avec l'algorithme FFT-FEM sur une épaisseur de quelques millimètres seulement. La partie centrale, qui n'est pas axisymétrique à cause des canaux de ventilation, est traitée par un calcul éléments finis classique. Ce procédé permet d'étudier les disques ventilés mais il est fastidieux et les hypothèses faites sur la partie centrale du disque ont quelques limites. En effet, Vallet montre que les variations angulaires thermiques décroissent avec la profondeur (car le phénomène dépend du temps nécessaire à la diffusion, qui dépend lui-même de la diffusivité du matériau et de la vitesse de rotation du disque). Mais son analyse est basée sur un calcul de freinage pour lequel la pression hydraulique appliquée est de  $P = 2 \text{ bars}$ , et la vitesse de rotation  $\omega$  décroît de  $105 \text{ km/h}$  à  $70 \text{ km/h}$ . Ce freinage correspond aux conditions qui induisent le moins de gradients orthoradiaux (pression faible et vitesse élevée).

Le calcul mécanique est aussi 3D mais la rotation du disque n'est pas simulée. Vallet fait d'abord un calcul élastique puis élasto-plastique du disque qui subit comme chargement la température évaluée par le calcul thermique à quatre instants successifs ( $t = 0s$ ,  $t = 1s$ ,  $t = 2s$ , et  $t = 7s$ ) pour un freinage de  $7s$ . Le calcul mécanique est répété  $n$  fois, avec le même cycle de température, jusqu'à stabilisation des courbes  $(\sigma, \epsilon)$  mais cela signifie qu'il localise les bandes chaudes toujours au même endroit, alors que les essais montrent que d'un freinage à l'autre, les bandes chaudes changent de position. A partir de cette constatation, Vallet déduit que la répartition radiale des contraintes ne doit pas être prise en compte dans son analyse. Enfin, malgré une loi de comportement relativement simple et la rotation du disque non modélisée, les temps de calcul (environ un jour et demi pour la mécanique) restent un obstacle.

Enfin, on peut citer deux autres travaux qui s'intéressent exclusivement aux points chauds régulièrement espacés sur la circonférence des pistes de frottement. Il s'agit d'abord des travaux de **Barber et Du** [80] qui ont programmé la méthode de perturbation de

Burton sur un modèle 3D. Pour des raisons de temps de calcul, le maillage est relativement grossier, axisymétrique et se limite à un anneau circulaire. Un calcul de valeurs propres permet de déterminer une valeur de vitesse critique à partir de laquelle il y a instabilité thermoélastique. Le but de ces travaux est uniquement de déterminer les conditions pour lesquelles une perturbation initiale mène à la formation de points chauds. Il n’y a donc pas de calcul mécanique de structure pour l’étude des contraintes dans le disque.

De même, **Kao** [48] concentre ces travaux sur la formation ou non de points chauds. Son modèle est donc aussi tridimensionnel. Par contre, comme il considère que la formation des points chauds ne se limite pas à un problème d’instabilités thermiques mais thermomécanique (cf. partie (1.4.1)), son calcul thermoélastique couplé consiste à effectuer un calcul transitoire du disque, avec simulation de la rotation, et avec prise en compte du contact entre le disque et les plaquettes. Le flux de chaleur est calculé à partir des pressions de contact et donc varie au cours du freinage. Il dépend aussi des variations du coefficient de frottement, de la vitesse de glissement et de la pression. Son calcul a nécessité la programmation d’éléments de contact spécifiques et le couplage thermique/contact élastique consomment beaucoup de temps CPU. De ce fait, la loi de comportement utilisée est simplement élastique et le maillage est trop grossier (environ 440 éléments pour un modèle 3D du disque). Il est clair que la taille des éléments finis ne permet pas d’évaluer de façon assez précise les gradients thermiques. Et malgré cela, les temps de calcul restent longs (plus d’un jour de calcul). De plus, les points chauds ne peuvent apparaître que parce-qu’une déformée initiale a été donnée au disque ; le gondolement imposé dépend du nombre de points chauds observés. Encore une fois, cette méthode n’est pas prédictive.

### 1.6.5 Analyse des résultats numériques

De manière générale, on remarque que les validations des calculs concernent essentiellement la partie thermique. Floquet et Vallet comparent les résultats de leur calcul thermique avec des modèles analytiques [40] mais ils ne disposent pas vraiment de résultats expérimentaux pour valider leur calcul. Autrement, les **corrélations calculs/essais** se font principalement pour quelques points de mesure de température par thermocouples (frottants ou embarqués). D’autres techniques comme la thermographie infrarouge ou les pyromètres optiques sont aussi utilisées, mais plus rarement (Dufrenoy, Kao, etc. ). Par contre, aucune étude ne fait état de corrélation sur des valeurs mécaniques (déformations, contraintes).

Les difficultés de la modélisation numérique du frein ont monopolisé beaucoup de temps de travail d’investigation et de développement. De ce fait, les analyses des résultats restent sommaires. En effet, certains auteurs limitent leurs études à celle des déformations thermoélastiques. Dans le cas de Righes G. et Calderale P.M. [75], c’est dans le but d’étudier les influences mutuelles des élévations de température et du contact. Dans le cas de Cohen - qui fait l’étude thermique d’un secteur angulaire du disque suivi du calcul de la déformée thermique -, c’est pour étudier la mise en cône du disque. Ce sont les déplacements des pistes qui sont alors analysés. D’autres auteurs considèrent que l’appari-



tion ou non des points chauds est un critère d'acceptation ou de refus du disque (Barber, Kao). Ce raisonnement semble un peu réducteur car des disques peuvent rompre alors qu'il n'y a pas de points chauds. Inversement, la formation de points chauds n'est pas forcément rédhibitoire.

Lorsqu'un calcul mécanique est effectué, son analyse se limite souvent à des comparaisons de niveaux de contraintes maximales ou de déformations axiales maximales entre différentes géométries de disque. Autrement, les contraintes sont analysées par la mécanique de la rupture (Vallet, Pommier). Par exemple, Pommier [74] étudie le problème de propagation de fissure en s'appuyant sur la valeur du facteur d'intensité de contrainte. Selon elle, une fissure qui démarre dans une zone chaude peut se propager pendant un moment mais, quand elle sort de la zone chaude, les contraintes sont alors trop faibles pour atteindre le facteur d'intensité de contrainte critique et donc pour que la fissure continue à se propager. Toutefois, l'étude des points chauds montre que ces régions chaudes se déplacent d'un freinage à l'autre. Cela signifie que la zone froide à côté de la première zone chaude peut devenir elle-même une zone chaude ; dans ce cas, les contraintes dans cette zone peuvent être suffisantes pour que la fissure continue à se propager. Dufrenoy, lui, teste, sur le cycle stabilisé obtenu par calcul, les modèles de Taira (dérivé de la relation de Manson-Coffin en fatigue isotherme), et de l'activation thermique de Degallaix (séparation de l'influence des déformations plastiques et de la température par cumul de deux dommages). Mais ces modèles ne s'appliquent qu'à des problèmes isothermes. Le modèle avec interaction fatigue-fluage de Chaboche-Lemaitre a également été utilisé mais il s'agit là d'un modèle complexe 1D, dont le passage en 3D anisotherme est à valider. Le problème du disque est, lui, clairement multiaxial.

Finalement, on remarque que les modèles numériques sont soit trop simples pour rendre compte des phénomènes (hypothèses trop fortes, maillage pas assez fin), soit plus sophistiqués mais dans ces cas-là, on se heurte à des problèmes de temps de calcul. Toute la difficulté réside donc dans le choix d'un bon compromis entre les temps CPU et les hypothèses de modélisation. Ces dernières doivent être faites en fonction du but recherché : étude des vibrations, évaluation de l'efficacité de freinage ou prédiction d'endommagements, sans perdre de vue qu'un même degré de précision doit être recherché dans les différentes étapes de l'étude.

## 1.7 Objectif et stratégie

Notre objectif est de mettre en place une méthode prédictive de la tenue en service du disque de frein. Pour cela, il est impératif d'aborder le problème par une **approche globale**. Cela signifie qu'il faut faire conjointement l'étude et la modélisation du comportement du matériau, des chargements appliqués au disque et des endommagements induits par ces chargements. En effet, il ne sert à rien de modéliser très finement les cycles de chargements subis par le disque si le comportement du matériau est trop simplement représenté. De même, il ne sert à rien d'évaluer la réponse thermomécanique du disque si

celle-ci n'est pas analysée en terme d'endommagement.

Ainsi, étant donné les gammes de températures de fonctionnement du disque et les niveaux de contraintes atteints dans le disque, il est impératif d'abandonner l'hypothèse d'un **comportement mécanique du matériau** purement élastique de la fonte. Notre modélisation doit prendre en compte les plastifications éventuelles du disque. On peut même supposer que lorsque la température est très élevée, le matériau devient visqueux. La simulation numérique du disque de frein doit par conséquent permettre l'introduction d'une loi élastoviscoplastique de la fonte. L'objectif étant d'étudier le comportement du disque pendant sa durée de vie, il faut prendre en compte l'adoucissement cyclique du matériau. il faut donc simuler le comportement stabilisé de la fonte, représentatif de la vie, et non celui qui correspond aux premières sollicitations.

Pour la modélisation des **chargements** et la détermination de la réponse thermomécanique du disque à ces chargements, plusieurs difficultés se présentent. Il faut faire des hypothèses simplificatrices qui restent réalistes, tout en conservant des finesses de maillage permettant d'évaluer correctement les gradients thermiques et mécaniques dans le disque. Plus précisément, les impératifs en terme de maillage sont relatifs à la taille des éléments finis : ils doivent être assez fins dans les zones à forts gradients thermomécaniques. Ces zones concernent les pistes de frottement (dans l'épaisseur des pistes et dans la direction orthoradiale), ainsi que la région où le disque peut rompre, à savoir la gorge du bol (concentration de contraintes).

Le choix des "bonnes" hypothèses est plus difficile et sujet à discussion. Tout d'abord, comme notre problème est de simuler les disques de freins automobiles, l'hypothèse d'axisymétrie est rejetée. En effet, rappelons que d'importants gradients orthoradiaux ont été observés dans le domaine automobile par Kreitlow et al. [53] et Abendroth [2], Thoms [84] et qu'ils sont plus pénalisants que les autres gradients, d'après Anderson et Knapp. Les calculs thermomécaniques que nous présenterons dans le chapitre (3) confirmeront cette observation. Ces gradients sont d'autant plus élevés que la vitesse de rotation est faible (ce qui laisse plus de temps à un élément de matière de refroidir lorsqu'il ne se trouve pas sous les plaquettes) et la pression des plaquettes élevée (l'échauffement sur un tour est alors plus élevé), ce qui est le cas dans le domaine automobile. De plus, une modélisation axisymétrique (ou 2D) ne permet pas d'évaluer les déformations globales tridimensionnelles du disque qui jouent un rôle important dans la distribution des contraintes. L'utilité d'une modélisation 3D transitoire est soulignée par D'Cruz [33]. La solution de Vallet qui consiste à découper le disque en zones axisymétriques et zones non-axisymétriques est lourde à mettre en œuvre et sujet à discussion.

Vallet, sur ce même freinage, compare les contraintes thermiques et les contraintes dues au chargement mécanique seul. Il trouve que les contraintes thermiques sont vingt fois plus élevées que les contraintes dues à la pression des plaquettes et conclut que l'on peut négliger le chargement mécanique. Cette hypothèse lui permet d'effectuer un calcul mécanique sans prise en compte de la rotation du disque avec comme unique chargement

la température issue du calcul tridimensionnel transitoire avec rotation du disque. Cette conclusion semble un peu rapide car le freinage en question génère des températures allant jusqu'à  $T_{max} = 800^{\circ}C$ , ce qui induit des contraintes thermiques effectivement très élevées. Mais la plupart des freinages automobiles ne génèrent pas de températures aussi élevées. De plus, la comparaison est faite au niveau des pistes de frottement, mais dans le bol, la différence entre les contraintes mécaniques et thermiques est plus faible. En effet, dans cette zone, la température est plus faible. De plus, le couple de freinage et les serrages mécaniques (encastrement sur le porte-moyeu, mise en cône du disque empêchée en partie par la présence des plaquettes, etc.) peuvent induire des contraintes mécaniques plus élevées que celles induites par la pression des plaquettes. Les sollicitations mécaniques doivent donc être modélisées sur un modèle tridimensionnel avec simulation de la rotation du disque et modélisation des déformations globales de la structure.

L'étude bibliographique a montré l'importance de la distribution de contact, et donc de flux de chaleur, sur les gradients thermiques. On ne peut donc pas se contenter d'une distribution de flux homogène sur toute la surface des plaquettes. Cependant, le couplage du calcul de contact avec le calcul thermique induit de très longs temps de calcul. Il s'agit alors de savoir quel est l'impact de ces distributions de température sur les contraintes (qui sont les grandeurs qui permettent au final de faire l'analyse des endommagements du disque). De plus, l'intérêt d'un calcul couplé du contact et de la thermique est diminué par le fait que le contact varie d'un freinage à l'autre.

L'autre source de non-uniformité des chargements correspond aux points chauds. On sait que ce phénomène n'apparaît que de temps en temps. En effet, le processus de formation des points chauds est un peu long ; ainsi, la plupart des freinages ne durent pas assez longtemps pour former des points chauds. C'est un phénomène qui intéresse plus le domaine ferroviaire où les durées de freinages sont bien plus importantes (au delà de plusieurs dizaines de secondes). Leurs apparitions en automobile sont donc plutôt rares et ils jouent un rôle plus essentiel dans les mécanismes conduisant aux vibrations. Il semble donc plus important de simuler correctement les freinages quotidiens avant d'aborder le problème des points chauds macroscopiques. Quant aux points chauds dus aux aspérités, ils relèvent plus de la tribologie et leur formation est plutôt aléatoire. Ils ne seront pas étudiés. Finalement, nous nous attacherons à prédire les gradients thermiques orthoradiaux autres que ceux générés par les points chauds, car ils vont avoir un rôle prépondérant sur les déformations globales non-axisymétriques du disque, et une influence sur les contraintes au niveau du bol.

L'usure, du moment qu'elle reste faible, ne joue pas sur la tenue mécanique du disque. Elle sera donc négligée.

Enfin, les dernières hypothèses qui nous semblent raisonnables sont de négliger les couplages autres que celui de la thermique sur la mécanique. Les dissipations plastiques, par exemple, sont bien trop faibles en comparaison avec le flux de chaleur issu du frottement.

La dernière contrainte concerne les temps de calcul. Il est clair qu'il faut faire des compromis entre les hypothèses du modèle, la finesse de maillage et les temps de calcul. Pour être exploitable par les bureaux d'étude, notre objectif est de fournir des méthodes de calcul qui permettent de simuler un freinage en moins d'une journée. La finesse de maillage doit être raisonnable. Enfin, il faut que la simulation soit tridimensionnelle non-axisymétrique, avec prise en compte de la rotation du disque et du comportement non-linéaire du matériau. La stratégie est alors de mettre en place des méthodes de résolution qui permettraient de réduire les temps de calcul, tout en respectant les exigences citées précédemment. Pour cela, nous avons développé des algorithmes de résolution adaptés aux problèmes de structures mobiles soumises à des chargements thermomécaniques fixes. Ces algorithmes feront l'objet de la partie (2).

Enfin, la dernière partie de l'approche globale de l'étude du disque de frein concerne l'étude des endommagements. Comme il a été décrit précédemment, les endommagements subis par le disque sont divers et variés. Leurs modes de formation diffèrent d'un type d'avarie à l'autre. Par exemple, les calculs de Vallet montrent que dans l'épaisseur des pistes de frottement, la matière s'adapte, c'est-à-dire que le cycle stabilisé devient élastique. S'il y a endommagement, il s'agit donc de fatigue polycyclique (à grand nombre de cycles). Au contraire, en surface, la matière s'accommode. La réponse mécanique stabilisée fait donc apparaître une amplitude de déformation plastique constante à chaque cycle. Il s'agit là de fatigue oligocyclique (à faible nombre de cycles). Il est évident qu'à chaque type d'endommagement, vont correspondre des variables d'endommagement différentes (déformations plastique cumulée, énergie dissipée ou encore cisaillement maximal, etc.) et des critères d'endommagement différents. Cependant, tous les critères doivent être adaptés à un contexte multiaxial et anisotherme.



# Chapitre 2

## Algorithmes adaptés aux structures soumises à des chargements mobiles

### 2.1 Contexte général

Le travail présenté dans ce chapitre porte sur les méthodes de résolution numérique de problèmes faisant intervenir des structures soumises à des chargements mobiles. D'une manière générale, ces derniers peuvent être mécaniques, thermiques ou bien thermomécaniques. On trouve dans l'industrie mécanique de nombreux exemples de tels problèmes : les couronnes des roulements à billes sont soumises à la pression des billes qui sont en rotation ; la chaussée est soumise aux passages successifs des véhicules ; lors d'une opération de galetage, des galets en rotation viennent en contact avec les gorges des vilebrequins ; les engrenages mécaniques en rotation ou les vis sans fin sont soumis au contact des dents des autres engrenages ; le pneu d'une roue en rotation est soumis à la pression de la route ; les pièces soudées sont soumises à un arc de soudure en translation ; le rail est soumis à la pression des roues du train et à l'échauffement induit par le frottement ; le disque de frein est soumis à la pression des plaquettes et à l'échauffement induit. Sous l'effet de ces chargements, les structures peuvent plastifier, s'échauffer et subir des phénomènes d'endommagement et de fatigue. Une première étape de leur étude consiste donc en l'évaluation de leurs "états thermomécaniques". Les essais expérimentaux sont souvent coûteux, longs et nécessitent l'utilisation de pièces qui ne sont parfois que des prototypes. L'objectif est alors de mettre en œuvre des simulations numériques pouvant compléter ces essais. Elles doivent fournir une évaluation fiable des champs couplés de température, de contraintes et de déformations plastiques des structures étudiées, en des temps de calculs raisonnables.

La difficulté majeure de ces problèmes réside dans la mobilité du chargement par rapport à la structure. Pour les résoudre, les méthodes numériques "naturelles" et "classiques" consistent en des algorithmes incrémentaux où l'on translate le chargement à chaque pas de temps. Elles sont lentes et ne peuvent pas être envisagées dès lors que l'on veut calculer des modèles tridimensionnels à grand nombre de degrés de liberté avec des non-linéarités telles que la plasticité, le contact ou le couplage thermomécanique.

## 2.2 Diverses méthodes de résolution

Les problèmes de chargements mobiles doivent être abordés différemment. Plusieurs approches analytiques basées sur le potentiel complexe ont été proposées. Mais elles concernent surtout des cas simples de massifs semi-infinis, de matériaux purement élastiques, de charges ponctuelles, etc. [22]. La méthode des lignes de glissement a, elle, été développée pour résoudre les problèmes de grandes déformations (formage, extrusion, etc.), avec l'approximation de solides rigides-plastiques [43][77]. Toutes ces méthodes ne permettent pas l'étude de chargements, de comportement de matériaux ou de géométries complexes. Il est donc impératif de disposer de méthodes efficaces de résolution numérique.

L'”**analyse simplifiée**” développée par Zarka J. [88][89], qui repose sur l'hypothèse de régime stationnaire, permet d'obtenir numériquement directement l'état limite d'une structure soumise à des chargements périodiques. Cette méthode est applicable dans une étude qui s'inscrit dans une approche globale où l'on cherche l'état stabilisé de la structure soumise à un même cycle répété  $n$  fois. Mais elle n'est pas adaptée à l'évaluation cycle par cycle de la réponse thermomécanique de la structure.

De même, la **méthode à grand incrément de temps** développée par Ladevèze [8][55] permet d'évaluer la réponse d'une structure soumise à un grand nombre de cycles qui doivent être identiques.

La méthode **ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian)** développée récemment [4][91] permet d'aborder les problèmes transitoires à grandes déformations. Elle repose sur une technique dite de ”split method” qui consiste à décomposer le calcul en une résolution lagrangienne suivie d'une étape eulérienne durant laquelle les variables d'état sont transportées avec le flux de matière. Une technique d'”adaptation de maillage” permet de réactualiser la géométrie de la structure afin que les mailles du modèle Eléments Finis ne soient pas trop distordues par les grandes déformations induites par le chargement. Mais ce procédé est très coûteux en temps de calcul. La méthode ALE est particulièrement adaptée à des problèmes de laminage ou encore d'extrusion. Elle est aussi très utilisée pour résoudre les problèmes de couplage fluide/structure. Mais elle est un peu trop ”sophistiquée” et lente pour des problèmes faisant intervenir des grands déplacements mais des petites transformations.

Enfin, la méthode **FFT-FEM** déjà décrite dans la partie (1.6.4) permet aussi une évaluation tridimensionnelle de problèmes transitoires avec des réductions de temps de calcul. Cependant, elle ne s'adapte pas à des structures non axisymétriques.

## 2.3 Principe des algorithmes développés

La caractéristique essentielle des problèmes traités dans notre travail est de faire intervenir des grands déplacements mais des petites transformations, que l'histoire soit transitoire ou stationnaire. La méthode que nous proposons consiste en un calcul **Transitoire dans le Repère du Chargement en Coordonnées Eulériennes (que l'on note brièvement TRC)**. Celui-ci permet d'intégrer finement l'histoire du chargement, c'est-à-dire de prendre en compte l'évolution au cours du temps de son amplitude (évolution des contacts, variation du flux thermique...) et celle de sa vitesse de déplacement (dans le cas du disque de frein, elle est évidemment décroissante!). L'idée est de travailler dans le repère du chargement, et non plus dans celui de la structure, d'utiliser les coordonnées eulériennes pour prendre en compte le flux de matière et de prendre comme configuration de référence celle qui suit le mouvement rigide de la structure. Ainsi, deux avantages peuvent être énumérés :

- avec ce choix de configuration de référence et avec l'hypothèse des petites transformations, les distorsions des éléments sont petites. Le maillage n'a donc pas besoin d'être réactualisé : il reste fixe tout au long du calcul. Les lourdeurs numériques rencontrées avec les méthodes d'adaptation de maillage et les temps de calcul associés à ces adaptations sont donc économisés.
- les zones où apparaissent les forts gradients thermomécaniques sont en général fixes dans le repère du chargement (le repère de calcul). Le maillage peut alors n'être raffiné que dans ces régions. Les autres peuvent être maillées plus grossièrement, ce qui économise de l'espace mémoire et du temps de calcul.

La méthode TRC est adaptée aux problèmes pour lesquels la vitesse et l'amplitude des chargements doivent être simulés précisément. Si les chargements varient d'un cycle à l'autre mais peuvent être considérés comme constants pendant chaque passage et si l'hypothèse de régime permanent dans le repère du chargement peut être faite, le problème peut être résolu par l'**algorithme stationnaire passage par passage** proposé par Q.S. Nguyen [69], K. Dang Van et H. Maitournam [26] ; celui-ci permet la détermination de l'évolution des champs plastiques et thermiques après chaque passage du chargement supposé mobile à vitesse constante. Le calcul s'effectue aussi dans le repère du chargement. Finalement, l'algorithme TRC n'est autre qu'une généralisation de l'algorithme stationnaire aux problèmes transitoires. Si on peut faire l'hypothèse supplémentaire que tous les cycles de chargement sont identiques et que la structure s'adapte ou s'accommode, l'ajout de la condition de périodicité de la solution aboutit à l'**algorithme stationnaire direct** qui donne en un seul calcul la réponse stabilisée du problème. Ces méthodes stationnaires (passage par passage et directe) ont l'avantage d'être extrêmement rapides par rapport à un calcul incrémental classique et ont été appliquées avec succès à de nombreux problèmes industriels [29][42][59].

Pour chaque type d'algorithme (transitoire et stationnaire), les équations du problème continu en thermoélastoplasticité couplé sont dans un premier temps écrites dans le repère du chargement, en petites transformations. Leurs formulations discrétisées sont ensuite



données. Les schémas de résolution et les algorithmes sont ensuite décrits, ainsi que leurs implémentations dans le code de calcul *Abaqus*. L'étude comparative entre les algorithmes TRC, stationnaires et l'algorithme incrémental "classique" basé sur des translations successives du chargement, appliqués à un calcul élastoplastique bidimensionnel d'une structure rectangulaire, valide les méthodes. Enfin, le cas des structures périodiques non axi-symétriques est traité dans le but de simuler le freinage d'un disque ventilé.

## 2.4 Algorithme TRC

### 2.4.1 Description du problème

On considère un milieu continu occupant un domaine  $\mathcal{D}$ , soumis à un chargement thermique et mécanique mobile. Il s'agit d'écrire les équations du problème dans un repère lié au chargement, en prenant comme configuration de référence la configuration initiale animée du mouvement rigidifiant de la structure dans ce repère.

On note  $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  un repère animé du mouvement d'ensemble rigidifiant du solide et  $\mathcal{R}' = (O', \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  un repère lié au chargement d'amplitude variable qui se déplace à la vitesse  $\mathbf{V}(t)$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans le repère de calcul  $\mathcal{R}'$ , la structure se déplace donc à la vitesse  $-\mathbf{V}(t)$  (*figure 2.1*). Ainsi, la dérivée particulière (eulérienne) de toute grandeur tensorielle  $\mathbf{B}$  liée à la matière s'écrit sous la forme :

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_x \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

avec :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_r(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$$

où  $\mathbf{x}$  désigne la position géométrique du point matériel,  $\mathbf{v}$  la vitesse du point matériel par rapport à  $\mathcal{R}'$  et  $\mathbf{v}_r$  sa vitesse par rapport à  $\mathcal{R}$ .

L'hypothèse des petites transformations dans le repère lié au milieu  $\mathcal{D}$  permet de négliger  $\mathbf{v}_r(\mathbf{x}, t)$  par rapport à  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ . Ainsi, l'expression de la dérivée particulière de  $\mathbf{B}$  se simplifie en :

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla_x \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

### 2.4.2 Equations du problème thermoélastoplastique continu écrites dans le repère du chargement

On se place dans le cadre d'une évolution quasistatique en petites transformations. Le matériau est de type standard généralisé [70]. Il est homogène et isotrope ; il obéit à une loi de comportement élastoplastique et à la loi de conduction de Fourier. Le couplage

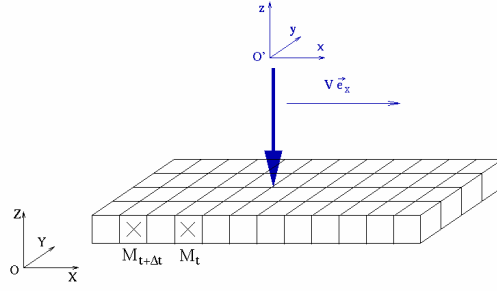


FIG. 2.1: Chargement mobile sur une plaque

thermomécanique réside dans la prise en compte des contraintes thermiques et de la dissipation de chaleur générée par les déformations plastiques et les variables internes. La production de chaleur par déformations élastiques est négligée.

Le solide occupe un domaine  $\mathcal{D}$ , de frontière  $\partial\mathcal{D}$ . Il est soumis à :

- un chargement mécanique composé de :
  - forces volumiques  $\mathbf{f}$  dans  $\mathcal{D}$
  - forces surfaciques  $\mathbf{F}^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{F}}$  de  $\partial\mathcal{D}$
  - déplacements imposés  $\mathbf{u}^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{u}}$  de  $\partial\mathcal{D}$
- un chargement thermique composé de :
  - productions internes de chaleur  $r$  dans  $\mathcal{D}$
  - flux imposés  $q^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_q$  de  $\partial\mathcal{D}$
  - températures imposées  $T^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_T$  de  $\partial\mathcal{D}$

Les parties  $\partial\mathcal{D}_F$  et  $\partial\mathcal{D}_u$ , ainsi que  $\partial\mathcal{D}_q$  et  $\partial\mathcal{D}_T$ , sont complémentaires.

Pour établir les équations d'évolution thermomécanique dans le repère du chargement, il faut expliciter toutes les dérivées temporelles selon l'expression (2.1). Les équations qui font intervenir les vitesses sont : la loi de comportement (avec le terme d'accélération), la loi d'écoulement plastique et l'équation de chaleur. Avec les notations classiques, on obtient alors le système d'équations (2.2) :

- Equation d'équilibre

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ = \rho \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} + 2 \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \nabla \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla (\nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \right] \end{aligned} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Loi de comportement élastoplastique

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{L} : \left[ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) - \alpha(T(\mathbf{x}, t) - T_o(\mathbf{x})) \mathbf{I} \right] + \boldsymbol{\sigma}_o(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathcal{D} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p & \text{dans } \mathcal{D} \end{aligned}$$

- Loi d'écoulement plastique

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec } \lambda f = 0 ; \lambda \geq 0 ; f \leq 0 & \text{dans } \mathcal{D} \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \alpha_k(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= -\lambda \frac{\partial f}{\partial A_k}(\mathbf{x}, t) & \text{dans } \mathcal{D} \end{aligned}$$

- Compatibilité

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + {}^t \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Conditions aux limites mécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^d(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_F \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_u \end{array}$$

- Equation thermique

$$\begin{aligned} k \Delta T(\mathbf{x}, t) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \rho c \nabla T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \\ = -r(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \left( \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \right) \\ + A_k(\mathbf{x}, t) : \left( \frac{\partial \alpha_k}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \alpha_k(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \right) \end{aligned} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Loi de Fourier

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Conditions aux limites thermiques

$$\begin{cases} T(\mathbf{x}, t) = T^d(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q^d(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_T \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_q \end{array}$$

(2.2)

Pour un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire et isotrope de type von Mises, la fonction  $f$  qui définit le domaine d'élasticité du matériau est de la forme :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^p) = \sqrt{(\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^p) : (\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^p)} - k(\bar{\epsilon}^p(t))$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \text{ est le déviateur de } \boldsymbol{\sigma}; \\ H \text{ est le module d'écrouissage}; \\ \bar{\epsilon}^p(t) = \bar{\epsilon}^p(0) + \int_t \sqrt{\dot{\epsilon}^p(\tau) : \dot{\epsilon}^p(\tau)} d\tau \text{ est la déformation plastique cumulée}; \\ k(\bar{\epsilon}^p) \text{ est une fonction croissante de } \bar{\epsilon}^p. \end{array} \right.$$

### 2.4.3 Equations discrétisées du problème

#### 2.4.3.1 Discrétisation par différences finies de la dérivée particulaire

On se place dans le repère  $\mathcal{R}'$  du chargement en coordonnées eulériennes. On rappelle que les dérivées particulières s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

Il s'agit de discrétiser cette expression dans l'espace  $(\mathbf{x}, t)$ . La discrétisation temporelle est arbitraire et dépend de la nature du problème étudié. La discrétisation spatiale est naturellement dictée par le transport des grandeurs physiques le long de lignes de courant. Ainsi, si l'on suppose que la vitesse  $-\mathbf{V}$  de la structure par rapport au repère  $\mathcal{R}'$  est selon l'abscisse  $x$ , le terme de convection correspondant à une grandeur  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$-\nabla \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = -V(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}(\mathbf{x}, t)$$

D'où :

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - V(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

Si  $\dot{\mathbf{B}} = 0$ , il s'agit du problème classique de Cauchy, qui consiste à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equation de transport} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = 0 \\ \text{Condition initiale} & \mathbf{B}_0(x) \text{ connu} \end{array} \right.$$

dont on connaît la solution exacte :

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}(x + Vt, 0) = \mathbf{B}_0(x + Vt)$$

La résolution graphique du problème de Cauchy peut se faire par la méthode des caractéristiques (*figure 2.2*) lorsque la solution est continue [56].

La résolution numérique du problème de Cauchy est traitée par la méthode des différences finies. Il existe de nombreux schémas d'intégration dont les principaux sont

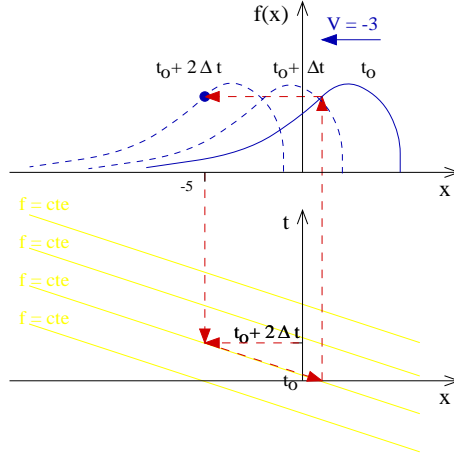


FIG. 2.2: Résolution du problème de Cauchy par la méthode des caractéristiques

rappelés ici. Supposons qu'il existe une grille de discrétisation du plan  $(x,t)$  que l'on suppose régulière par souci de clarté :

$$\begin{cases} x_i = i\Delta x & i \in Z \\ t_n = n\Delta t & n \in N \end{cases}$$

On note  $\nu = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$  le nombre d'onde. On suppose que la vitesse  $V$  est constante sur chaque intervalle de temps.

Si  $\nu \in Z$ , le point  $(x + V\Delta t)$  appartient à la grille de discrétisation et on a la solution exacte du problème.

Si  $\nu \notin Z$ , il faut estimer la valeur  $B_0(x + V\Delta t)$ .

Supposons que  $k \leq \nu < k + 1$ . Différentes interpolations sont possibles, dont :

- (a) l'interpolation linéaire entre  $x + k\Delta x$  et  $x + (k + 1)\Delta x$  ;
- (b) l'interpolation linéaire entre  $x + (k - 1)\Delta x$  et  $x + (k + 1)\Delta x$  ;
- (c) l'interpolation parabolique entre  $x + (k - 1)\Delta x$ ,  $x + k\Delta x$  et  $x + (k + 1)\Delta x$ .

Si  $|\nu| \leq 1$ , alors  $k = 0$ , et les interpolations

- (a) coïncide avec le schéma aux différences finies explicite en temps et décentré à droite ;
- (b) coïncide avec le schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs ;
- (c) coïncide avec le schéma aux différences finies de Lax-Wendroff ;

Les expressions discrétisées de  $\dot{\mathbf{B}}$  correspondant à ces trois schémas sont :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \dot{\mathbf{B}}(x, t) &= \frac{\mathbf{B}(x, t + \Delta t) - \mathbf{B}(x, t)}{\Delta t} + V \frac{\mathbf{B}(x, t) - \mathbf{B}(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \\ \text{(b)} \quad \dot{\mathbf{B}}(x, t) &= \frac{\mathbf{B}(x, t + \Delta t) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}(x - \Delta x, t) + \mathbf{B}(x + \Delta x, t))}{\Delta t} - V \frac{\mathbf{B}(x + \Delta x, t) - \mathbf{B}(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \\ \text{(c)} \quad \dot{\mathbf{B}}(x, t) &= \frac{\mathbf{B}(x, t + \Delta t) - \mathbf{B}(x, t)}{\Delta t} - V \frac{\mathbf{B}(x + \Delta x, t) - \mathbf{B}(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} - V^2 \Delta t \frac{\mathbf{B}(x + \Delta x, t) - 2\mathbf{B}(x, t) + \mathbf{B}(x - \Delta x, t)}{2\Delta x^2} \end{aligned}$$

Pour  $|\nu| \leq 1$ , ces trois schémas sont stables. Le schéma retenu au final sera donc

pris parmi eux, aussi bien pour le cas où  $\dot{\mathbf{B}} = 0$ , que pour le cas où  $\dot{\mathbf{B}} \neq 0$ .

Les différentes propriétés des schémas permettent de les départager. Le schéma (c) est le plus précis des trois. En effet, les erreurs sont en :

- (a)  $O(\Delta x + \Delta t)$  ;
- (b)  $O(\frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \Delta t)$  ;
- (c)  $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$ .

De plus, le schéma (c) est moins dissipatif que le (b). Le schéma (b) est donc abandonné. Le schéma (a) a l'avantage d'être très simple ; il est moins précis que le (c) mais ne donne pas lieu aux oscillations numériques rencontrées habituellement en présence de discontinuités avec le schéma (c). Les deux schémas ont donc été programmés mais seuls sont présentés les équations et les résultats relatifs au schéma (a). En effet, les résultats numériques obtenus avec les deux schémas ne sont pas très différents, compte tenu de la nature des problèmes étudiés.

D'autres schémas aux différences finies existent mais ils présentent des défauts :

- le schéma centré explicite est instable ;
- le schéma centré implicite est inconditionnellement stable mais il ne fournit pas une solution exacte dans le cas où  $\dot{\mathbf{B}} = 0$  ;
- le schéma décentré implicite n'est pas exact non plus, etc.

#### 2.4.3.2 Discrétisation de la loi d'écoulement plastique

La loi d'écoulement plastique est une équation du type :

$$\dot{\mathbf{B}}(x, t) = G(\mathbf{B}(x, t), \mathbf{A}(x, t), x, t)$$

Dans la forme discrétisée, si  $\dot{\mathbf{B}}$  est estimée entre les dates  $t$  et  $t + \Delta t$ , la valeur de  $G(\mathbf{B}(x, t^*), \mathbf{A}(x, t^*), x, t^*)$  peut être prise pour  $t^*$  quelconque entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Le choix implicite  $G(\mathbf{B}(x, t + \Delta t), \mathbf{A}(x, t + \Delta t), x, t + \Delta t)$  est retenu car il présente deux propriétés essentielles [24] :

- la loi de normalité (condition de Kuhn-Tucker) est respectée à tout instant ;
- le schéma implicite est inconditionnellement superstable (c'est-à-dire qu'il converge sans oscillations).

En résumé, la loi d'écoulement plastique est discrétisée selon l'expression suivante :

$$\frac{\boldsymbol{\epsilon}^p(x, t + \Delta t) - \boldsymbol{\epsilon}^p(x, t)}{\Delta t} + V \frac{\boldsymbol{\epsilon}^p(x, t) - \boldsymbol{\epsilon}^p(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}(x, t + \Delta t)}$$

### 2.4.3.3 Equations discrétisées

On note  $(n+1)$  le point à l'abscisse  $x$ ,  $(n)$  le point à l'abscisse  $x + \Delta x$ , comme figuré sur le schéma (2.3). Le temps  $t$  est pris comme instant initial : les grandeurs évaluées à cet instant sont indicées par un zéro. L'incrément de la date  $t$  à la date  $t + \Delta t$  d'une grandeur  $\mathbf{B}$  est notée  $\Delta \mathbf{B}$ , de sorte que  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \Delta \mathbf{B}$ . Les valeurs recherchées sont  $\mathbf{B}(n+1, t + \Delta t)$ , notées simplement  $\mathbf{B}$ . Les termes d'inertie sont négligés. Les équations discrétisées selon le schéma décentré à droite sont alors :

· Equation d'équilibre

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi de comportement élastoplastique

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [ \Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p - \alpha \Delta T \mathbf{I} ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi d'écoulement plastique

$$\frac{\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}_o^p}{\Delta t} + V \frac{\boldsymbol{\epsilon}_o^p - \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)}{\Delta x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec } \lambda f = 0 ; \lambda \geq 0 ; f \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

$$\frac{\alpha_k - \alpha_{ko}}{\Delta t} + V \frac{\alpha_{ko} - \alpha_{ko}(n)}{\Delta x} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial A_k} \quad \text{avec } \lambda f = 0 ; \lambda \geq 0 ; f \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Compatibilité

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [ \nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Conditions aux limites mécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\mathbf{F}} \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\mathbf{u}} \end{array}$$

· Equation thermique

$$\begin{aligned} k \Delta T - \rho c \frac{T - T_o}{\Delta t} - \rho c V \frac{T_o - T_o(n)}{\Delta x} \\ = -r - \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}_o^p}{\Delta t} + V \frac{\boldsymbol{\epsilon}_o^p - \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)}{\Delta x} \right) + A_k : \left( \frac{\alpha_k - \alpha_{ko}}{\Delta t} + V \frac{\alpha_{ko} - \alpha_{ko}(n)}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Conditions aux limites thermiques

$$\begin{cases} T = T^d \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q^d \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_T \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_q \end{array}$$

(2.5)

Pour des raisons de minimisation du temps de calcul, le problème est supposé faiblement couplé. Ainsi, sa résolution numérique se compose de deux étapes successives. Dans un premier temps, le problème thermique est résolu indépendamment des phénomènes mécaniques, par un algorithme TRC avec un schéma explicite décentré à droite. Le champ de température ainsi déterminé est imposé lors d'un calcul mécanique. La résolution du problème mécanique est d'abord présentée, puis l'implémentation dans le code de calcul *Abaqus* des algorithmes thermiques et mécaniques est décrite.

#### 2.4.4 Résolution numérique du problème mécanique

La résolution numérique du problème mécanique est présentée dans cette partie. La structure est soumise à des efforts mécaniques volumiques et surfaciques et aux températures supposées connues. Le problème est résolu de manière incrémentale. L'état thermomécanique de toute la structure est connu à l'instant  $t$ . L'état thermique de toute la structure est connu à l'instant  $t + \Delta t$ .

On note respectivement  $T$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^p$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^e$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\mathbf{e}$ , la température, les contraintes, les contraintes déviatoriques, les déformations plastiques, les déformations élastiques, les déformations totales et les déformations déviatoriques au point  $(n + 1)$  au temps  $t + \Delta t$ . Quand elles sont évaluées à l'instant  $t$  considéré comme instant initial, ces grandeurs sont indicées par un zéro. On cherche à établir les expressions de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  en fonction de  $T$ ,  $T_o$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_o$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_o^p$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)$  et  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ .

Dans le cas d'un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire, obéissant au critère de plasticité de von Mises, on a :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^p) = \sqrt{(\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^p) : (\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^p)} - k(\bar{\epsilon}^p)$$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^p}{\|\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^p\|}$$

La condition de cohérence donne l'expression du multiplicateur plastique  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{1}{2\mu + H} \frac{\|\boldsymbol{\xi}^*\| - k}{\Delta t}$$

où :

$$\boldsymbol{\xi}^* = 2\mu \mathbf{e} - (2\mu + H) \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) \boldsymbol{\epsilon}_o^p - (2\mu + H) \frac{V\Delta t}{\Delta x} \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)$$

Ainsi, si on note :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [\Delta\boldsymbol{\epsilon} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{p*} - \alpha \Delta T \mathbf{I}]$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{p*} = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \frac{V\Delta t}{\Delta x} \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)$$



- Si  $f(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\epsilon}^{p*}) < 0$ , il n'y a pas de plastification :  $\lambda = 0$

L'expression du tenseur des déformations plastiques est alors :

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \frac{V\Delta t}{\Delta x} \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)$$

- Si  $f(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\epsilon}^{p*}) \geq 0$ , il y a de la plastification :  $\begin{cases} \lambda > 0 \\ f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases}$

L'expression du tenseur des déformations plastiques est alors :

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \frac{V\Delta t}{\Delta x} \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n) + \frac{1}{(2\mu + H)} \left(1 - \frac{k}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|}\right) \boldsymbol{\xi}^*$$

Le critère de plastification peut se réécrire sous la forme :

S'il y a plastification  $\lambda > 0$  soit  $\|\boldsymbol{\xi}^*\| > k$

Ainsi, en résumé :

$$\begin{cases} \text{Si } \|\boldsymbol{\xi}^*\| > k, & \text{il y a plastification,} \\ & \boldsymbol{\epsilon}^p = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \frac{V\Delta t}{\Delta x} \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n) + \frac{1}{(2\mu + H)} \left(1 - \frac{k}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|}\right) \boldsymbol{\xi}^* \\ \text{Si } \|\boldsymbol{\xi}^*\| \leq k, & \text{il n'y a pas de plastification,} \\ & \boldsymbol{\epsilon}^p = \left(1 - \frac{V\Delta t}{\Delta x}\right) \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \frac{V\Delta t}{\Delta x} \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n) \end{cases}$$

avec  $\boldsymbol{\xi}^* = 2\mu \mathbf{e} + (2\mu + H) \left(\frac{V\Delta t}{\Delta x} - 1\right) \boldsymbol{\epsilon}_o^p - (2\mu + H) \frac{V\Delta t}{\Delta x} \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)$

*Remarque : La formulation est non locale car la valeur du point  $(n + 1)$  dépend de celle du point  $(n)$ .*

Les contraintes s'expriment sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [\Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p - \alpha \Delta T \mathbf{I}]$$

La matrice tangente cohérente qui assure une convergence quadratique [81] est donnée par les expressions suivantes :

- S'il n'y a pas de plastification,

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L}$$

- S'il y a plastification,

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L} - \frac{4\mu^2}{2\mu+H} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \left[ \frac{\boldsymbol{\xi}^* \otimes \boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|^2} + (\|\boldsymbol{\xi}^*\| - k) \left( \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|} - \frac{\boldsymbol{\xi}^* \otimes \boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|^3} \right) \right]$$

### 2.4.5 Schéma de l'algorithme T.R.C. mécanique pour un comportement élastoplastique cinématique linéaire

Les dérivées temporelles apparaissant dans les équations mécaniques correspondent à l'accélération et la vitesse de déformation plastique. La prise en compte du terme d'inertie modifie la rigidité du système mais n'intervient pas dans le schéma de résolution. Ainsi, la méthode TRC ne diffère d'une résolution élastoplastique incrémentale "classique" que par l'expression des déformations plastiques. L'algorithme de projection radiale proposé par Nguyen Q.S. [68] et Simo et Taylor [81] est utilisé pour résoudre le problème élastoplastique. Le schéma de l'algorithme est donné dans le tableau (2.1). Les indices  $j$  et  $j + 1$  désignent les numéros d'itération.

*Remarque : Si  $\frac{V\Delta t}{\Delta x} = 1$  et s'il n'y a pas de plastification au point  $(n+1)$ , l'expression de  $\boldsymbol{\epsilon}^p(n+1)$  est :*

$$\boldsymbol{\epsilon}^p(n+1) = \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)$$

*En effet, la particule matérielle qui se trouve au point  $(n+1)$  à l'instant  $t + \Delta t$  se trouvait au point  $(n)$  à l'instant  $t$ , puisque le flux de matière a une vitesse égale à  $-V\mathbf{e}_x$  (figure 2.3). L'état de  $(n)$  à  $t$  représente donc bien l'état initial de  $(n+1)$  à  $t + \Delta t$ .*

0. Données à l'instant $t$ : $\{\boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o^p, T_o\}$ Données à l'instant $t + \Delta t$ : $\{\Delta T\}$ Initialisation : $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^p\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$
1. Données à l'instant $t_j = t + \Delta t_j$ : $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^p\}$
2. Calcul de l'équilibre global et détermination de $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}$
3. Test de plasticité
$\boldsymbol{\xi}_{j+1}^* = \mathbf{s}_o - H \boldsymbol{\epsilon}_o^p + 2\mu \Delta \mathbf{e}_{j+1} + (2\mu + H) \frac{V\Delta t}{\Delta x} (\boldsymbol{\epsilon}_o^p - \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n))$
Si $\ \boldsymbol{\xi}_{j+1}^*\  \leq k$ ,
incrément élastique : $\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p - \frac{V\Delta t}{\Delta x} (\boldsymbol{\epsilon}_o^p - \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n))$
Sinon,
incrément plastique : $\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p - \frac{V\Delta t}{\Delta x} (\boldsymbol{\epsilon}_o^p - \boldsymbol{\epsilon}_o^p(n)) + \frac{1}{2\mu + H} (1 - \frac{k}{\ \boldsymbol{\xi}^*\ }) \boldsymbol{\xi}^*$
Fin
$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p) - \alpha \Delta T \mathbf{I}]$
5. Test de convergence
Si convergence, aller à (0)
Sinon, aller à (1)

TAB. 2.1: Algorithme T.R.C. en élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire

## 2.4.6 Implémentation des algorithmes T.R.C. thermiques et mécaniques dans *Abaqus*

*Abaqus* met à disposition de l'utilisateur la possibilité de programmer des lois de comportement mécanique et thermique par l'intermédiaire de *user routines* en langage *fortran*. Pour le comportement mécanique, il s'agit de la *UMAT* (User MATerial) et pour le comportement thermique, il s'agit de la *UMATHT* (User MATerial HeaT).

### 2.4.6.1 UMAT

La routine *UMAT* permet de programmer la loi de comportement mécanique du matériau étudié, c'est-à-dire de donner les expressions du tenseur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  (STRESS), de diverses variables internes (SDV) (par exemple le tenseur des déformations plastiques, le tenseur des déformations visqueuses ou encore une variable d'endomma-

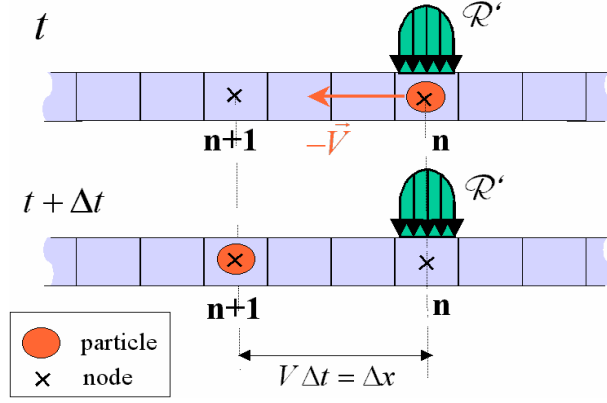


FIG. 2.3: Schéma de l'algorithme T.R.C. dans le cas où  $\Delta x = V\Delta t$

gement, etc.) et la matrice jacobienne cohérente (appelée aussi matrice tangente)  $\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \epsilon}$  (DDSDDE). Abaqus se charge de calculer l'équilibre global et fournit, en entrée de la *UMAT*, les déformations totales et les contraintes en début d'incrément  $\epsilon_o$  (STRAN),  $\sigma_o$  (STRESS) et l'incrément de déformations  $\Delta \epsilon$  (DSTRAN).

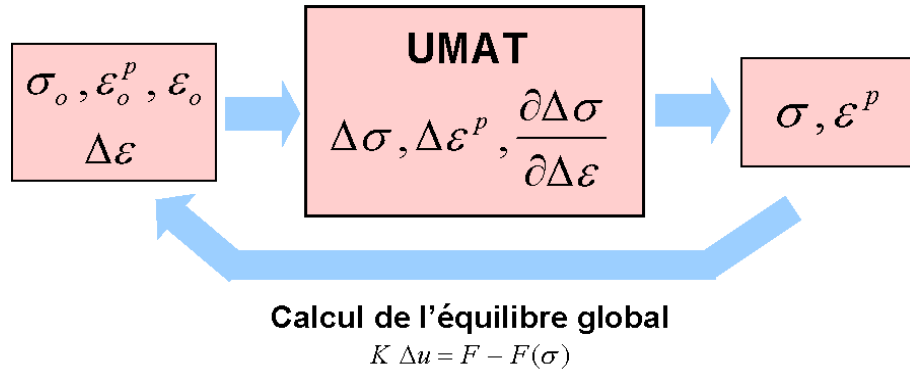


FIG. 2.4: Entrées et sorties de la UMAT

La difficulté principale que nous rencontrons réside dans le fait que la loi de comportement est non locale puisque les valeurs d'un point  $(n+1)$  dépendent de celles d'un autre point  $(n)$ . Or dans la *UMAT*, qui est appelée autant de fois qu'il y a de points d'intégration dans le maillage et d'itérations d'équilibre, les données disponibles (c'est-à-dire  $\Delta \epsilon$ ) ne concernent que le point de Gauss actuellement calculé. Ainsi, nous devons nous-mêmes gérer toutes les informations utiles au calcul mécanique concernant les différentes lignes de courant du maillage.

#### 2.4.6.2 UMATHT

La routine *UMATHT* permet de programmer la loi de comportement thermique du matériau étudié. La donnée d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation vérifiant le second principe de la thermodynamique détermine entièrement les équations d'évolution

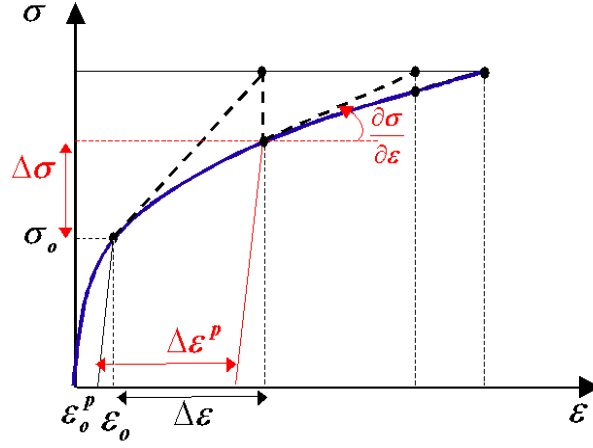


FIG. 2.5: Calcul élastoplastique itératif

du milieu [57]. Pour le comportement thermique, choisir une expression d'énergie libre  $\psi$  revient à choisir une énergie thermique interne  $u$ . Ainsi, dans la *UMATHHT*, il suffit de donner les expressions de l'énergie thermique interne par unité de masse  $u$  (U), de ses variations par rapport à la température et au gradient de la température  $\frac{\partial u}{\partial T}$  (DUDT) et  $\frac{\partial u}{\partial \nabla T}$  (DUDG), ainsi que celles du vecteur de flux de chaleur  $\mathbf{q}$  (FLUX), de ses dérivées  $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial T}$  (DFDT) et  $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \nabla T}$  (DFDG), et celle de la production volumique de chaleur  $r$  pour définir complètement le comportement thermique du problème. A partir de ces données, *Abaqus* se charge de recomposer l'équation d'équilibre thermique à résoudre et d'en déduire la température dans toute la structure.

Nous rappelons l'expression du premier principe de la thermodynamique :

$$1^{er} \text{ principe} : \rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \text{div} \mathbf{q}$$

La définition de l'énergie thermique interne  $u$  est :

$$\rho \dot{u} = \rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = r - \text{div} \mathbf{q} \quad (2.6)$$

L'énergie libre est :

$$\psi = e - Ts$$

D'où :

$$\dot{e} = \dot{\psi} + T\dot{s} + s\dot{T}$$

$$\dot{u} = \dot{\psi} + T\dot{s} + s\dot{T} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Si on choisit  $\psi$  tel que  $\psi = \psi(T, \epsilon^e, V_k)$  et : 
$$\left\{ \begin{array}{l} s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \\ A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \end{array} \right. , \text{ on obtient :}$$

$$\dot{\psi} = -s\dot{T} + \frac{1}{\rho} \sigma : \dot{\epsilon}^e + \frac{1}{\rho} A_k \dot{V}_k$$

Ainsi,

$$\dot{u} = T\dot{s} - \frac{1}{\rho} \sigma : \dot{\epsilon}^p + \frac{1}{\rho} A_k \dot{V}_k \quad (2.7)$$

On note que cette expression de  $\dot{u}$  découle directement du choix des variables internes.

Des deux expressions (2.6) et (2.7), on déduit :

$$r - \text{div } \mathbf{q} = \rho T \dot{s} - \sigma : \dot{\epsilon}^p + A_k \dot{V}_k \quad (2.8)$$

Le flux s'écrit :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T$$

L'hypothèse d'isotropie permet de retrouver la loi de conduction de Fourier, c'est-à-dire :

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.9)$$

où  $k$ , scalaire positif, est la conductivité du matériau.

On a alors :

$$-\text{div } \mathbf{q} = k \Delta T$$

Comme  $s = \frac{\partial \psi}{\partial T}$ , on a :

$$\rho T \dot{s} = \rho c \dot{T} - T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\epsilon}^e + \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \right)$$

L'équation (2.8) se réécrit :

$$k \Delta T - \rho c \dot{T} = -r - \sigma : \dot{\epsilon}^p + A_k \dot{V}_k - T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\epsilon}^e + \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \right) \quad (2.10)$$

L'équation de la chaleur (2.10) découle du choix de l'expression (2.7) de l'énergie thermique interne  $u$  et de l'expression (2.9) du vecteur de flux de chaleur  $\mathbf{q}$ . Ainsi, pour imposer l'équation de la chaleur à résoudre dans *Abaqus*, il suffit de déterminer les expressions de  $u$  et de  $\mathbf{q}$  qui conviennent et de les programmer dans la *UMATHHT*.

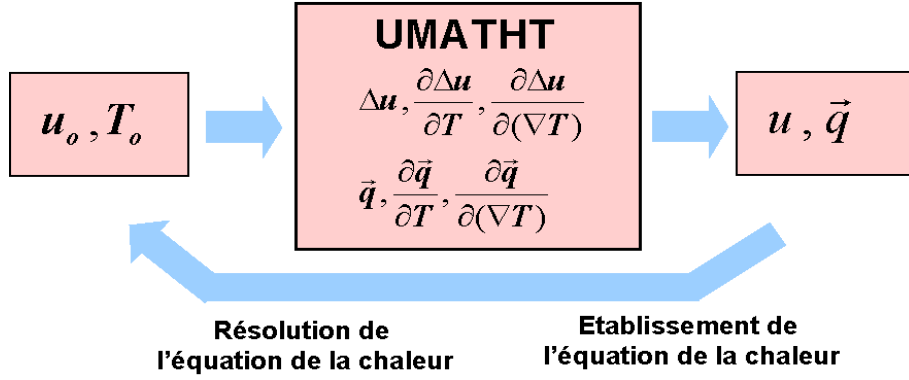


FIG. 2.6: Entrées et sorties de la UMATHT

Si on néglige les termes de couplage thermomécanique, l'équation (2.7) se simplifie sous la forme :

$$\dot{u} = T\dot{s} = c\dot{T} \quad (2.11)$$

La formulation discrétisée du problème thermique est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = u_o + c(T - T_o) & \mathbf{q} = -k \nabla T \\ \frac{\partial u}{\partial T} = c & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial T} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial u}{\partial(\nabla T)} = \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial(\nabla T)} = -k \mathbf{I} \end{array} \right.$$

L'équation thermique discrétisée correspondant à l'algorithme T.R.C. est :

$$k \operatorname{div}(\nabla T)(n+1) - \rho c \frac{T(n+1) - T_o(n+1)}{\Delta t} - \rho c V \frac{T_o(n+1) - T_o(n)}{\Delta x} = -r(n+1)$$

Si on néglige les termes de couplage thermomécanique et si on considère que la conductivité  $k$  est indépendante de la température  $T$ , les expressions à intégrer dans la *UMATHT* sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = u_o + c(T - T_o) + c \frac{V \Delta t}{\Delta x} (T_o - T_o(n)) & \mathbf{q} = -k \nabla T \\ \frac{\partial u}{\partial T} = c & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial T} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial u}{\partial(\nabla T)} = \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial(\nabla T)} = -k \mathbf{I} \end{array} \right.$$

De même que pour le calcul mécanique, la difficulté principale réside dans le fait que la loi de comportement thermique est non locale. La *UMATHT* doit donc non seulement fournir les expressions de l'énergie thermique interne et du flux de chaleur, mais aussi gérer les informations sur toutes les lignes de courant.

## 2.5 Algorithme stationnaire

### 2.5.1 Principe de l'algorithme

L'algorithme stationnaire a été développé pour déterminer l'état thermomécanique d'une structure soumise à un chargement thermique et/ou mécanique mobile après un nombre fini de passages de chargement (il s'agit alors de l'**algorithme stationnaire passage par passage**) ou après un très grand nombre de passages de chargement (il s'agit alors de l'**algorithme stationnaire direct**). Cet algorithme a été initialement proposé par Nguyen Q.S. dans le but d'étudier le mouvement permanent d'une fissure se propageant dans un matériau parfaitement plastique [69] ; il a ensuite été étendu par Dang Van et Maitournam aux matériaux thermoélastoplastiques [25][59]. Dans cette méthode de résolution, le chargement est supposé stationnaire au cours du temps dans un repère en translation sur un solide prismatique infini ou en rotation sur un solide immobile. Du point de vue d'un observateur lié au chargement, le régime est supposé permanent. Cela signifie que toutes les grandeurs thermomécaniques du problème ne dépendent plus du temps au cours de chaque passage de chargement. L'amplitude et la vitesse du chargement doivent être constantes pendant chaque passage, mais elles peuvent varier d'un cycle à l'autre. Si toutefois, les cycles sont tous identiques et si le chargement appliqué à la structure est tel que celle-ci s'adapte ou s'accommode, la solution thermomécanique asymptotique du problème est périodique. L'exploitation de cette propriété de périodicité permet de calculer directement l'état limite de la structure, c'est-à-dire l'état stabilisé obtenu après un grand nombre de passages du chargement. Cette méthode de résolution est appelée algorithme stationnaire direct [59].

Nous rappelons qu'une structure élastoplastique soumise à un chargement cyclique a un comportement asymptotique qui peut être de trois types (*figure 2.7*) :

- adaptation : la réponse limite est élastique, mais le matériau a pu se déformer plastiquement au cours des premiers cycles ;
- accommodation : la réponse en déformations plastiques devient périodique à partir d'un certain nombre de cycles ;
- rochet : il y a accumulation progressive de déformation plastique entraînant la ruine de la structure.

L'unicité de la solution stationnaire pour un passage de chargement dans le cas de matériaux élastoviscoplastiques, élastoplastiques et thermoélastoviscoplastiques non couplés a été démontrée par H. Maitournam. Quand les matrices d'élasticité et d'écrouissage ne dépendent pas de la température, l'unicité de la solution thermomécanique couplée est également vérifiée [59].

La convergence de la solution stationnaire obtenue par le calcul passage par passage vers la solution déterminée par le calcul direct n'a par contre jamais été démontrée. Les



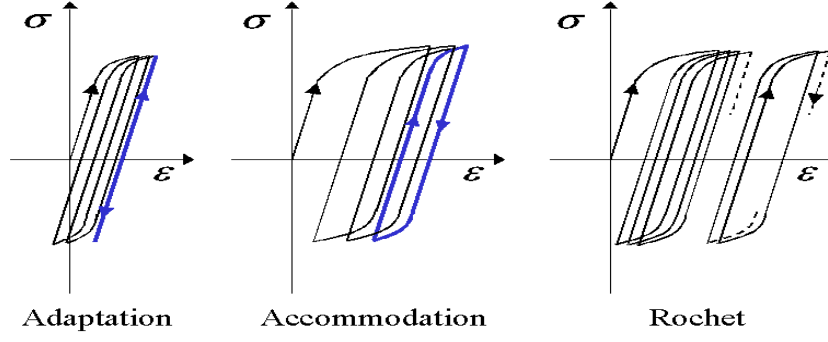


FIG. 2.7: Comportement cyclique d'un matériau élastoplastique

calculs déjà effectués tendent à montrer que la résolution directe permet une très bonne évaluation de l'état limite d'une structure qui s'accomode ou qui s'adapte. Toutefois, cette solution directe est toujours légèrement sous-estimée .

### 2.5.2 Equations du problème thermomécanique continu stationnaire écrites dans le repère du chargement

Les notations sont celles adoptées dans la partie (1) pour la description de l'algorithme T.R.C. L'hypothèse de régime permanent dans le repère du chargement se traduit par le fait que l'on s'affranchit de la dépendance en temps et que donc toutes les dérivées temporelles partielles sont nulles. Ainsi, l'expression de la dérivée particulaire d'une quantité tensorielle  $\mathbf{B}$  se simplifie en :

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t); \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

On se place toujours dans le cadre d'une évolution quasistatique en petites transformations. Le matériau est standard généralisé [57] homogène et isotrope ; il obéit à une loi de conduction de Fourier. Le comportement est supposé indépendant de la température. Le couplage thermomécanique réside dans la prise en compte des contraintes thermiques et de la dissipation de chaleur générée par les déformations plastiques.

Le solide occupe un domaine  $\mathcal{D}$ , de frontière  $\partial\mathcal{D}$ . Il est soumis à :

- un chargement mécanique composé de :
  - forces volumiques  $\mathbf{f}$  dans  $\mathcal{D}$
  - forces surfaciques  $\mathbf{F}^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{F}}$  de  $\partial\mathcal{D}$
  - déplacements imposés  $\mathbf{u}^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{u}}$  de  $\partial\mathcal{D}$
- un chargement thermique composé de :
  - productions internes de chaleur  $r$  dans  $\mathcal{D}$

- flux imposés  $q^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_q$  de  $\partial\mathcal{D}$
- températures imposées  $T^d$  sur une partie  $\partial\mathcal{D}_T$  de  $\partial\mathcal{D}$

Les parties  $\partial\mathcal{D}_F$  et  $\partial\mathcal{D}_u$ , ainsi que  $\partial\mathcal{D}_q$  et  $\partial\mathcal{D}_T$ , sont complémentaires.

Dans le cas d'un comportement mécanique élastoplastique, le système d'équations (2.13) correspond au problème stationnaire dans le repère du chargement.

- Equation d'équilibre

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \nabla(\nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Loi de comportement élastoplastique

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L} : [ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) - \alpha(T(\mathbf{x}, t) - T_o(\mathbf{x})) \mathbf{I} ] + \boldsymbol{\sigma}_o(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Loi d'écoulement plastique

$$-\nabla \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec } \lambda f = 0 ; \lambda \geq 0 ; f \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

$$\nabla \alpha_k(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \lambda \frac{\partial f}{\partial A_k}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Compatibilité

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} [ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + {}^t\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Conditions aux limites mécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^d(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial\mathcal{D}_F \\ \text{sur } \partial\mathcal{D}_u \end{array}$$

- Equation thermique

$$k \Delta T(\mathbf{x}, t) + \rho c \nabla T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

$$= -r(\mathbf{x}, t)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : (-\nabla \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) + A_k(\mathbf{x}, t) : (-\nabla \alpha_k(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t))$$

- Loi de Fourier

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

- Conditions aux limites thermiques

$$\begin{cases} T(\mathbf{x}, t) = T^d(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q^d(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial\mathcal{D}_T \\ \text{sur } \partial\mathcal{D}_q \end{array}$$

(2.13)

Pour un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire et isotrope de type von Mises, la fonction  $f$  qui définit le domaine d'élasticité du matériau est de la forme :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^p) = \sqrt{(\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^p) : (\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^p)} - k(\bar{\epsilon}^p(t))$$

Le cas d'un comportement mécanique élastoviscoplastique à écrouissage cinématique linéaire de type Norton-Hoff est également étudié. Nous rappelons les équations régissant le comportement mécanique d'un tel matériau :

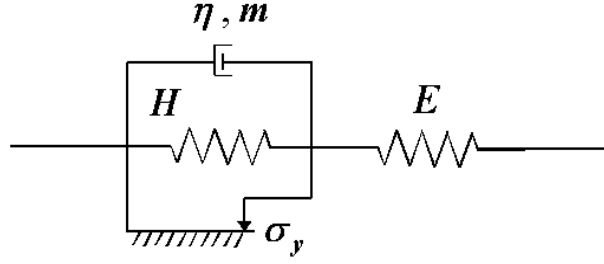


FIG. 2.8: Modèle élastoviscoplastique de type Norton-Hoff

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L} : [ \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t) - \alpha(T(\mathbf{x}, t) - T_o(\mathbf{x})) \mathbf{I} ] + \boldsymbol{\sigma}_o(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}(\mathbf{x}, t) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \langle \frac{f}{v} \rangle^m(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \\ f(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(\mathbf{x}, t)) = J_2(\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) - H\boldsymbol{\epsilon}^{vp}(\mathbf{x}, t)) - \sigma_y \end{array} \right.$$

où  $\left\{ \begin{array}{l} \langle B \rangle \text{ désigne la partie positive de } B ; \\ J_2(B) = \sqrt{\frac{3}{2} B : B} . \end{array} \right.$

Le système d'équations continues correspondant au problème élastoviscoplastique stationnaire dans le repère du chargement est alors (2.14) :

- Equation d'équilibre
$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \nabla(\nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$
- Loi de comportement élastoviscoplastique
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{L} : [ \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t) - \alpha(T(\mathbf{x}, t) - T_o(\mathbf{x})) \mathbf{I} ] + \boldsymbol{\sigma}_o(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathcal{D} \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(\mathbf{x}, t) & \text{dans } \mathcal{D} \end{aligned}$$
- Loi d'écoulement viscoplastique
$$-\nabla \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2} \left\langle \frac{J_2(\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^{vp})}{\eta} \right\rangle^m(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^{vp}}{J_2(\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^{vp})}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$
- Compatibilité
$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} [ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + {}^t \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$
- Conditions aux limites mécaniques
$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^d(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_F \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_u \end{array}$$
- Equation thermique
$$\begin{aligned} k \Delta T(\mathbf{x}, t) + \rho c \nabla T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) & \quad \text{dans } \mathcal{D} \\ = -r(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : (-\nabla \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) & \end{aligned}$$
- Loi de Fourier
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$
- Conditions aux limites thermiques
$$\begin{cases} T(\mathbf{x}, t) = T^d(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = q^d(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_T \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_q \end{array}$$

(2.14)

On remarque que, quel que soit le comportement (élastoplastique ou élastoviscoplastique), l'équation d'écoulement des déformations permanentes peut s'écrire selon la forme :

$$\nabla \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) = F(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t), \beta(\mathbf{x}, t))$$

où  $\beta$  représente toute sorte de variables comme la température, la vitesse ou encore des variables d'écrouissage et  $F$  une fonction quelconque. L'intégration de cette équation

donne :

$$\epsilon^p(\mathbf{x}, t) = \int_x^\infty F(\boldsymbol{\sigma}(\xi, t), \epsilon^p(\xi, t), \beta(\xi, t)) d\xi$$

L'expression du tenseur des contraintes devient :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) : \left( \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) - \int_x^\infty F(\boldsymbol{\sigma}(\xi, t), \epsilon^p(\xi, t), \beta(\xi, t)) d\xi - \alpha(T - T_o) \mathbf{I} \right) + \boldsymbol{\sigma}_o$$

L'état thermomécanique d'un point ( $x$ ) est donc fonction de ceux de tous les points situés en amont. Les lois ne sont donc pas locales et les calculs doivent être effectués par ligne de courant, en partant du point le plus en amont de la structure. Le calcul stationnaire est effectué pour une position de chargement donnée. Les éléments qui se trouvent les plus en amont donnent l'état de déformation permanente initial de la structure, tandis que les éléments situés en aval donnent l'état de déformation résiduelle après le passage du chargement.

Le calcul stationnaire passage par passage peut être effectué plusieurs fois. L'état de déformations résiduelles obtenu en aval de la structure après un passage représente l'état initial de la structure au passage suivant. Ainsi, si après plusieurs calculs, les déformations plastiques ou viscoplastiques deviennent constantes par ligne de courant, cela signifie que la structure s'est adaptée. Si par contre, elles sont égales en amont et en aval mais varient sur une ligne de courant, la structure s'est accommodée. A chaque passage de chargement, il y a déformations plastiques mais la réponse sur un cycle (un passage) est périodique. Enfin, si après chaque passage, il y a un incrément de déformations permanentes, cela signifie qu'il y a du rochet ; la réponse de la structure ne stabilise pas.

Il apparaît que si la structure s'adapte ou s'accomode après l'application d'un très grand nombre de cycles identiques, une condition de périodicité sur la réponse limite, en terme de déformations permanentes et de paramètres d'écrouissage, peut être ajoutée et donne lieu à une résolution directe du problème. Si le chargement se déplace selon l'axe  $\mathbf{e}_x$ , cette condition s'écrit :

$$\epsilon^p(-\infty, y, z) = \epsilon^p(+\infty, y, z)$$

Dans un problème stationnaire, la dépendance en temps a été transformée en dépendance spatiale. Dans un problème classique non stationnaire, la condition qui permet de déterminer si une structure s'adapte ou s'accomode est :

$$\exists T, \exists t^*, \forall t > t^*,$$

$$\epsilon^p(t + T) = \epsilon^p(t)$$

où  $T$  est le temps d'une période, c'est-à-dire d'un cycle.

### 2.5.3 Equations discrétisées du problème

#### 2.5.3.1 Discrétisation par différences finies de la dérivée temporelle

On rappelle que dans le cas du calcul stationnaire, les dérivées particulières s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = -\nabla \mathbf{B}(\mathbf{x}); \mathbf{V}(\mathbf{x})$$

Il n'y a plus de dérivée temporelle partielle à discrétiser. Le choix d'un schéma décentré à droite donne :

$$\dot{\mathbf{B}}(x) = V \frac{\mathbf{B}(x) - \mathbf{B}(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

#### 2.5.3.2 Discrétisation de la loi d'écoulement plastique

L'expression discrétisée de la loi d'écoulement plastique devient :

$$V \frac{\boldsymbol{\epsilon}^p(x) - \boldsymbol{\epsilon}^p(x + \Delta x)}{\Delta x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(x)$$

L'expression discrétisée de la loi d'écoulement viscoplastique devient :

$$V \frac{\boldsymbol{\epsilon}^{vp}(x) - \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{J_2(\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^{vp})}{\eta} \right\rangle^m(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^{vp}}{J_2(\mathbf{s} - H\boldsymbol{\epsilon}^{vp})}(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

#### 2.5.3.3 Equations discrétisées

On note  $(n+1)$  le point se trouvant à l'abscisse  $x$  ;  $(n)$  est le point juste en amont de  $(n+1)$  à l'abscisse  $x + \Delta x$  comme indiqué sur la figure (2.9). La valeur d'une quantité  $\mathbf{B}$  évaluée à l'instant initial  $t$  est notée  $\mathbf{B}_0$  de sorte qu'à l'instant  $t + \Delta t$ , on a  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B}$ . On suppose que l'état initial de la structure est constant par ligne de courant. Le point calculé est  $(n+1)$  à l'instant  $t + \Delta t$ .

Les termes d'inertie sont négligés. Les équations dans le cas d'un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire sont :

· Equation d'équilibre

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi de comportement élastoplastique

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [ \Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p - \alpha \Delta T \mathbf{I} ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi d'écoulement plastique

$$V \frac{\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p(n)}{\Delta x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Compatibilité

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [ \nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Conditions aux limites mécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\mathbf{F}} \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\mathbf{u}} \end{array}$$

· Equation thermique

$$k \text{ div}(\nabla T) - \rho c V \frac{T - T(n)}{\Delta x} = -r - \boldsymbol{\sigma} : (V \frac{\boldsymbol{\epsilon}^p - \boldsymbol{\epsilon}^p(n)}{\Delta x}) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Conditions aux limites thermiques

$$\begin{cases} T = T^d \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q^d \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_T \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_q \end{array}$$

(2.16)

Les équations dans le cas d'un comportement élastoviscoplastique de type Norton-Hoff avec un écrouissage cinématique linéaire sont :

· Equation d'équilibre

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi de comportement élastoviscoplastique

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [ \Delta \boldsymbol{\epsilon}^e - \alpha \Delta T \mathbf{I} ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi d'écoulement viscoplastique

$$V \frac{\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp(n)}}{\Delta x} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{J_2(\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^{vp})}{\eta} \right\rangle^m \frac{\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^{vp}}{J_2(\mathbf{s} - H \boldsymbol{\epsilon}^{vp})} \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Compatibilité

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [ \nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} ] \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Conditions aux limites mécaniques

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\mathbf{F}} \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\mathbf{u}} \end{array}$$

· Equation thermique

$$k \Delta T - \rho c V \frac{T - T(n)}{\Delta x} = -r - \boldsymbol{\sigma} : \left( V \frac{\boldsymbol{\epsilon}^{vp} - \boldsymbol{\epsilon}^{vp(n)}}{\Delta x} \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad \text{dans } \mathcal{D}$$

· Conditions aux limites thermiques

$$\begin{cases} T = T^d \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q^d \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \partial \mathcal{D}_T \\ \text{sur } \partial \mathcal{D}_q \end{array}$$

(2.17)

Si l'état stabilisé, s'il existe, est recherché directement, la condition de périodicité de la solution asymptotique est :

$$\boldsymbol{\epsilon}^p(n = 0) = \boldsymbol{\epsilon}^p(n = n_{final})$$



## 2.5.4 Résolution numérique du problème mécanique

Le problème est résolu passage par passage. L'état initial à la date  $t$  est connu pour toute la structure ; il est supposé constant par ligne de courant. L'état thermomécanique du point  $(n)$  est également connu pour l'instant  $t + \Delta t$ . Les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et les déformations plastiques  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  du point  $(n + 1)$  à l'instant  $t + \Delta t$  sont exprimées en fonction de  $T_o$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_o$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_o^p$ ,  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p(n)$  et  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ .

Dans le cas d'un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire, on a pour le point  $(n + 1)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } \|\boldsymbol{\xi}^*\| > k, & \text{il y a plastification,} \\ & \boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p(n) + \frac{1}{(2\mu+H)} \left(1 - \frac{k}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|}\right) \boldsymbol{\xi}^* \\ \text{si } \|\boldsymbol{\xi}^*\| \leq k, & \text{il n'y a pas de plastification,} \\ & \boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p(n) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{s}_o - H \boldsymbol{\epsilon}_o^p + 2\mu \Delta\mathbf{e} - (2\mu + H) \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p(n)$$

Les contraintes s'expriment sous la forme suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [\Delta\boldsymbol{\epsilon} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p - \alpha \Delta T \mathbf{I}]}$$

La matrice tangente cohérente qui assure une convergence quadratique [81] est donnée par les expressions suivantes :

- S'il n'y a pas de plastification,

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L}}$$

- S'il y a plastification,

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L} - \frac{4\mu^2}{2\mu+H} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \left[ \frac{\boldsymbol{\xi}^* \otimes \boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|^2} + (\|\boldsymbol{\xi}^*\| - k) \left( \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|} - \frac{\boldsymbol{\xi}^* \otimes \boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|^3} \right) \right]}$$

*Remarque : Les valeurs au point  $(n + 1)$  dépendent des valeurs au point  $(n)$ . L'explication "physique" est la suivante : supposons que le chargement se soit déplacé de la position  $(P0)$  vers la position  $(P)$  (figure 2.9). Le calcul de la structure est effectué pour cette position de chargement.*

- S'il n'y a pas de plastification au point  $(n + 1)$ ,  
l'expression des déformations plastiques est

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p(n)$$

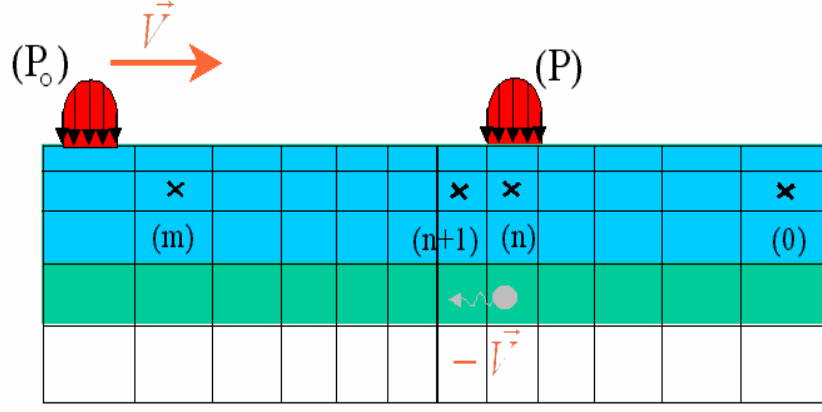


FIG. 2.9: Schéma de l'algorithme stationnaire *Passage par Passage*

Cela signifie que, comme le point  $(n + 1)$  a vu ce que le point  $(n)$  voit (si on imagine que le chargement s'est trouvé au dessus du point  $(n + 1)$ ), l'incrément de déformations plastiques en  $(n + 1)$  est logiquement égal à celui en  $(n)$ .

- S'il y a plastification,  
les déformations plastiques en  $(n + 1)$  s'écrivent :

$$\epsilon^p = \epsilon_o^p + \Delta\epsilon^p(n) + \frac{1}{(2\mu + H)} \left(1 - \frac{k}{\|\xi^*\|}\right) \xi^*$$

$\Delta\epsilon^p(n)$  correspond au terme convectif qui rend compte du transport des quantités le long des lignes de courant, tandis que  $\frac{1}{(2\mu + H)} \left(1 - \frac{k}{\|\xi^*\|}\right) \xi^*$  donne l'incrément temporel de déformations plastiques. Il apparaît clairement que  $(n)$  doit être calculé avant  $(n + 1)$ .

En supposant que l'état initial du point  $(0)$  (un point  $(0)$  par ligne de courant) est connu, l'état du point  $(1)$  peut être déduit. De point en point, l'état thermomécanique de toute la ligne de courant peut être déterminé. Le point de référence  $(m)$  illustre l'état résiduel de la structure une fois que le chargement a effectué un passage : son état représente l'état initial de tous les points appartenant à cette même ligne de courant pour le passage suivant. Le point  $(m)$  est pris loin du chargement pour illustrer correctement l'état résiduel après le passage du chargement, et suffisamment loin de la frontière de la structure pour éviter tout effet de bord.

Dans le cas d'un comportement élastoviscoplastique à écrouissage cinématique linéaire, on a pour un point  $(n + 1)$  :

$$\begin{cases} \text{si } J_2(\boldsymbol{\xi}^*) > \sigma_y, & \text{il y a plastification,} \\ \quad \quad \quad \boldsymbol{\epsilon}^{vp} = \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(n) + \frac{\Delta x}{V} \gamma \frac{\boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|} \\ \text{si } J_2(\boldsymbol{\xi}^*) \leq \sigma_y, & \text{il n'y a pas de plastification,} \\ \quad \quad \quad \boldsymbol{\epsilon}^{vp} = \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(n) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} (\|\boldsymbol{\xi}^*\| - (2\mu + H) \frac{\Delta x}{V} \gamma) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle_m \\ \boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{s}_o - H \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp} + 2\mu \Delta \mathbf{e} - (2\mu + H) \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(n) \end{cases}$$

Les contraintes s'expriment sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [ \Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp} - \alpha \Delta T \mathbf{I} ]$$

La matrice tangente cohérente est donnée par les expressions suivantes :

- S'il n'y a pas de plastification,

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L}$$

- S'il y a plastification,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}} &= \mathbf{L} - 2\mu \frac{\Delta x}{V} \left[ \left( \frac{\mathcal{K}}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|^2} - \frac{\gamma}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|^3} \right) \mathbf{L} : (\boldsymbol{\xi}^* \otimes \boldsymbol{\xi}^*) + \frac{\gamma}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|} \mathcal{J} : \mathbf{L} \right] \\ \mathcal{K} &= \frac{3}{2} \frac{m}{\eta} \left\langle \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} (\|\boldsymbol{\xi}^*\| - (2\mu + H) \frac{\Delta x}{V} \gamma) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle_{m-1} \cdot \frac{1}{1 + (2\mu + H) \frac{\Delta x}{V} \cdot \frac{m}{\eta} \cdot \left\langle \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} (\|\boldsymbol{\xi}^*\| - (2\mu + H) \frac{\Delta x}{V} \gamma) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle_{m-1}} \\ \mathcal{J} &= \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned}$$

*Remarque 1 : S'il y a plastification, les déformations viscoplastiques en  $(n + 1)$  s'écrivent :  $\boldsymbol{\epsilon}^{vp} = \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(n) + \frac{\Delta x}{V} \gamma \frac{\boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|}$ . De même que pour le calcul élastoplastique,  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{vp}(n)$  correspond au terme convectif, tandis que  $\frac{\Delta x}{V} \gamma \frac{\boldsymbol{\xi}^*}{\|\boldsymbol{\xi}^*\|}$  donne l'incrément temporel de déformations viscoplastiques.*

*Remarque 2 : La dépendance en temps due à la viscosité se traduit par le terme  $\frac{\Delta x}{V}$  qui apparaît directement dans l'expression de  $\boldsymbol{\epsilon}^{vp}$  et dans celle de  $\gamma$ .  $\frac{\Delta x}{V}$  correspond au temps que le chargement prendrait pour parcourir une distance équivalente à  $\Delta x$ .*

*Remarque 3 : Classiquement, en présence de viscosité, le choix du pas de temps  $\Delta t$  est essentiel pour les problèmes de stabilité des schémas explicites et les problèmes de précision de calcul des schémas implicites. En stationnaire, c'est le choix de la discrétisation*

spatiale  $\Delta x$  qui est essentiel.

*Remarque 4 : L'expression qui permet de définir la constante  $\gamma$  est implicite. Pour déterminer numériquement sa valeur, on pourra utiliser la méthode de Newton Rhapson.*

*Remarque 5 : La résolution s'effectue par ligne de courant, de la même manière que pour le calcul élastoplastique.*

En conclusion, cette méthode de résolution permet de déterminer la réponse thermomécanique de la structure après chaque passage du chargement ou après un très grand nombre de passages, en un seul calcul. Les lois ne sont pas locales et les intégrations des lois de comportement doivent être effectués dans un ordre lié aux lignes de courant.

### 2.5.5 Schéma de l'algorithme stationnaire

La méthode stationnaire ne diffère d'une résolution élasto(visco)plastique incrémentale "classique" que par l'expression des déformations (visco)plastiques. L'algorithme de projection radiale proposé par Nguyen Q.S. [68] est utilisé pour résoudre le problème.

Pour un comportement élastoplastique cinématique linéaire, le schéma de l'algorithme est donné dans le tableau (2.2). Les indices  $j$  et  $j + 1$  désignent les numéros d'itération.

Pour un comportement élastoviscoplastique avec écrouissage cinématique linéaire, le schéma de l'algorithme est donné dans le tableau (2.3).

Pour un comportement élastoplastique cinématique linéaire, le schéma de l'algorithme stationnaire direct est donné dans le tableau (2.4). Si le calcul ne converge pas, cela signifie que la structure subit un phénomène de rochet.

### 2.5.6 Implémentation des algorithmes stationnaires dans *Abaqus*

De même que pour l'algorithme T.R.C., l'algorithme stationnaire (Passage par Passage et Direct) s'implémente dans le code de calcul *Abaqus* grâce à la *user routine UMAT*. Les mêmes difficultés se rencontrent. Les formulations ne sont pas locales donc il faut gérer des données par ligne de courant. Dans le cas de l'algorithme stationnaire, s'ajoute la difficulté que l'intégration de la loi de comportement doit se faire dans un ordre établi par la nature des lignes de courant. Cette contrainte ne peut pas être gérée par l'utilisateur. Il faut donc passer par des "astuces" numériques qui ralentissent fortement la vitesse de convergence de l'algorithme. Enfin, dans le cas de l'algorithme stationnaire passage par passage, l'initialisation de chaque passage doit être correctement faite : l'état thermomécanique résiduel du passage précédent des éléments de référence ( $m$ ) (figure 2.9) doit être mis dans toute la structure comme état initial. Si les contraintes correspondant

0. Données à l'instant  $t$  :  $\{\boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o^p, T_o\}$  pour chaque ligne de courant  
Données à l'instant  $t + \Delta t$  :  $\{\Delta T\}$   
Initialisation :  $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^p\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$

1. Données à l'instant  $t_j = t + \Delta t_j$  :  $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^p\}$

2. Calcul de l'équilibre global et détermination de  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}$

3. Test de plasticité

$$\boldsymbol{\xi}_{j+1}^* = \boldsymbol{s}_o - H \boldsymbol{\epsilon}_o^p + 2\mu \Delta \boldsymbol{e}_{j+1} - (2\mu + H) \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n)$$

Si  $\|\boldsymbol{\xi}_{j+1}^*\| \leq k$ ,

incrément élastique :  $\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n)$

Sinon,

incrément plastique :  $\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n) + \frac{1}{2\mu + H} \left(1 - \frac{k}{\|\boldsymbol{\xi}_{j+1}^*\|}\right) \boldsymbol{\xi}_{j+1}^*$

Fin

$$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n) - \alpha \Delta T \mathbf{I}]$$

5. Test de convergence

Si convergence, aller à (0)

Sinon, aller à (1)

TAB. 2.2: Algorithme stationnaire passage par passage en élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire

à cet état ne sont pas autoéquilibrées, un calcul préalable doit être effectué. Il consiste à imposer les déformations permanentes des éléments de référence partout, et calculer les contraintes qui équilibrent ces déformations, en l'absence de tout chargement.

0. Données à l'instant $t$ : $\{\boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp}, T_o\}$ pour chaque ligne de courant Données à l'instant $t + \Delta t$ : $\{\Delta T\}$ Initialisation : $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^p\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$
1. Données à l'instant $t_j = t + \Delta t_j$ : $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^{vp}\}$
2. Calcul de l'équilibre global et détermination de $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}$
3. Test de plasticité
$\boldsymbol{\xi}_{j+1}^* = \boldsymbol{s}_o - H \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp} + 2\mu \Delta \boldsymbol{e}_{j+1} - (2\mu + H) \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^{vp}(n)$
Si $\ \boldsymbol{\xi}_{j+1}^*\  \leq k$ ,
incrément élastique : $\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^{vp} = \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^{vp}(n)$
Sinon,
incrément plastique :
Calcul de $\gamma$ par la méthode de Newton Rhapson :
$\gamma_{j+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} (\ \boldsymbol{\xi}^*\  - (2\mu + H) \frac{\Delta x}{V} \gamma_{j+1}) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle^m$
$\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^{vp} = \boldsymbol{\epsilon}_o^{vp} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^{vp}(n) + \frac{\Delta x}{V} \gamma_{j+1} \frac{\boldsymbol{\xi}^*}{\ \boldsymbol{\xi}^*\ }$
Fin
$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^{vp}(n) - \alpha \Delta T \mathbf{I}]$
5. Test de convergence
Si convergence, aller à (0)
Sinon, aller à (1)

TAB. 2.3: Algorithme stationnaire passage par passage en élastoviscoplasticité (modèle de Norton-Hoff) avec écrouissage cinématique linéaire

0. Données à l'instant  $t$  :  $\{\boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o, \boldsymbol{\epsilon}_o^p, T_o\}$  pour chaque ligne de courant  
 Données à l'instant  $t + \Delta t$  :  $\{\Delta T\}$   
 Initialisation :  $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^p\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$

1. Données à l'instant  $t_j = t + \Delta t_j$  :  $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j, \Delta \boldsymbol{\epsilon}_j^p\}$

2. Calcul de l'équilibre global et détermination de  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}$

3. Test de plasticité

$$\boldsymbol{\xi}_{j+1}^* = \boldsymbol{s}_o - H \boldsymbol{\epsilon}_o^p + 2\mu \Delta \boldsymbol{e}_{j+1} - (2\mu + H) \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n)$$

Si  $\|\boldsymbol{\xi}_{j+1}^*\| \leq k$ ,

incrément élastique :  $\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n)$

Sinon,

incrément plastique :  $\boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_o^p + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n) + \frac{1}{2\mu + H} (1 - \frac{k}{\|\boldsymbol{\xi}_{j+1}^*\|}) \boldsymbol{\xi}_{j+1}^*$

Fin

$$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbf{L} : [\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{j+1}^p(n) - \alpha \Delta T \mathbf{I}]$$

5. Test de convergence et de périodicité

Si convergence et  $\boldsymbol{\epsilon}^p(-\infty) = \boldsymbol{\epsilon}^p(+\infty)$  : arrêt du calcul

Sinon : ajouter la condition de périodicité  
 aller à (1)

TAB. 2.4: Algorithme stationnaire direct en élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire

## 2.6 Calculs de validation

### 2.6.1 Validation de l'algorithme T.R.C. sur une structure 2D

#### 2.6.1.1 Comparaison d'un calcul T.R.C. et d'un calcul "classique"

Afin de valider l'algorithme T.R.C., un calcul en élastoplasticité à écrouissage cinématique linéaire a été mené sur une structure bidimensionnelle. Les coefficients mécaniques sont présentés dans le tableau suivant :

module de Young	$E = 210 \text{ GPa}$
coefficient de poisson	$\nu = 0.27$
limite d'élasticité en traction	$\sigma_y = 340 \text{ MPa}$
coefficient d'écrouissage	$c = 12 \text{ GPa}$

La structure est rectangulaire et maillée en 400 éléments linéaires à 4 points de gauss. Dans le repère du chargement, la vitesse de translation de la structure est  $V = -1 \text{ m.s}^{-1}$ . On impose un chargement nodal sur cinq nœuds selon la direction  $-\mathbf{e}_y$ , d'amplitude  $F = 500 \text{ MN}$ . Les conditions aux limites sont figurées sur le schéma 2.10.

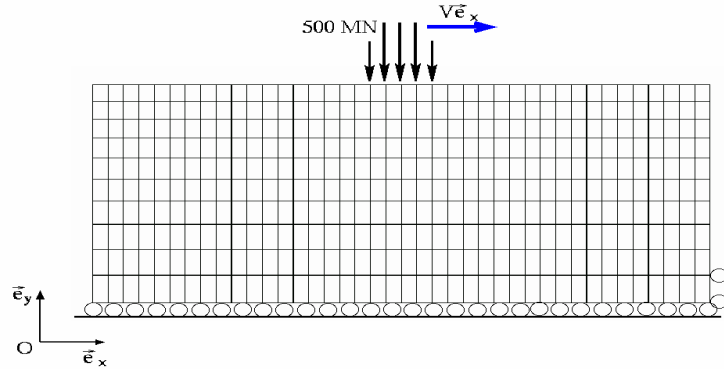


FIG. 2.10: Exemple d'une structure rectangulaire 2D

Deux différents calculs ont été comparés :

- Un calcul élastoplastique incrémental "classique" (qui utilise les options *\*ELASTIC* et *\*PLASTIC* d'*Abaqus*). Le chargement est translaté d'une distance équivalente à la taille d'une maille à chaque nouvel incrément de temps. Les isovaleurs des déformations plastiques selon la direction  $\mathbf{e}_y$  sont présentées dans la figure 2.11.
- Le même calcul avec l'algorithme TRC (Transitoire dans le Repère du Chargement). Le chargement est immobile et les équations prennent en compte le flux de matière.



Le schéma aux différences finies décentré à droite est programmé, avec le nombre d'onde  $|\nu| = 1$ . Les isovaleurs des déformations plastiques selon la direction  $\mathbf{e}_y$  sont présentées dans la figure 2.11.

Les résultats obtenus montrent une parfaite adéquation entre les deux solutions sur les premiers incréments de temps. Les différences perceptibles à partir de l'instant  $t_0 + 12\Delta t$  sont dues au fait que dans le calcul incrémental "classique", l'influence des conditions aux limites devient non négligeable, de par le déplacement du chargement. Les quantités mécaniques sont donc modifiées par des effets de bord. La méthode T.R.C. permet donc une meilleure évaluation de la réponse mécanique des structures très longues pour lesquelles les effets de bord ne doivent pas affecter la zone sous le chargement (par exemple le rail de chemin de fer, les problèmes de laminage de poutres...)

### 2.6.1.2 Intérêts de l'algorithme T.R.C.

Comme il a été souligné auparavant, l'un des avantages de l'algorithme T.R.C. est de permettre l'utilisation de maillages irréguliers en taille d'éléments. On compare donc deux calculs effectués sur :

- un maillage fin et régulier (figure 2.12) ;
- un maillage irrégulier, fin sous le chargement (avec les mêmes tailles de mailles que le maillage régulier) et grossier ailleurs (figure 2.13).

Les résultats mécaniques montrent des différences entre les deux calculs dans les "fins de traînées" des déformations plastiques. En revanche, les valeurs résiduelles constantes obtenues sont semblables ( $\epsilon_{yy}^p = 1.04 \cdot 10^{-4}$  avec le maillage irrégulier et  $\epsilon_{yy}^p = 1.02 \cdot 10^{-4}$  avec le maillage fin), ainsi que les gradients sous le chargement. L'utilisation de maillages irréguliers se justifie amplement par les économies de temps de calcul. En effet, le calcul transitoire avec le maillage fin dure 201 s CPU, tandis que le calcul avec le maillage irrégulier ne dure que 133 s CPU. Il est clair que le gain de temps de calcul sera encore plus notable dans des analyses de structures tridimensionnelles.

L'algorithme TRC présente aussi l'avantage de prendre en compte les variations éventuelles d'amplitude ou de vitesse du chargement. La réponse de la structure ne dépend de la vitesse que si le comportement du matériau y est sensible. Ainsi, la réponse thermique à un chargement thermique sera fonction de la vitesse du chargement. De même, si le comportement mécanique de la structure est visqueux, la réponse mécanique dépendra de la vitesse. En revanche, pour un comportement élastoplastique, la vitesse de déplacement du chargement n'influe pas la solution. On ne traitera donc que l'exemple d'une structure élastoplastique soumise à un chargement dont l'amplitude varie cycliquement de  $F = 200 \text{ MN}$  à  $F = 500 \text{ MN}$ . Les isovaleurs des déformations plastiques selon la direction  $\mathbf{e}_y$  sont présentées dans la figure (2.15). Elles montrent la périodicité géométrique de la réponse de la structure au chargement cyclique dans le temps.

Finalement, l'étude de ces exemples permet de conclure sur les avantages de l'algorithme T.R.C. développé :

- les domaines où les efforts et les conditions aux limites sont imposés sont fixes, quel que soit l'incrément de temps. La mise en œuvre de l'analyse est donc simple ;
- pour des structures très longues, on s'affranchit des effets de bords ;
- le maillage peut n'être fin que sous le chargement ; le calcul est donc plus efficace en terme de précision/temps de calcul. Le gain en temps n'est cependant pas optimisé dans cet exemple 2D car l'utilisation de la *UMAT* dans *Abaqus* engendre des compilations supplémentaires et nécessite des "astuces" de programmation consommatrices de CPU.
- les variations de l'amplitude et de la vitesse du chargement au cours d'un passage peuvent être simulées.

## 2.6.2 Validation de l'algorithme stationnaire sur une structure 2D

### 2.6.2.1 Comparaison d'un calcul stationnaire et d'un calcul T.R.C.

Afin de comparer l'algorithme T.R.C. avec l'algorithme stationnaire passage par passage, d'autres calculs ont été menés dont les résultats (isovaleurs de  $\epsilon_y^p$ ) sont donnés dans les figures (2.13), (2.14) :

- un calcul T.R.C. avec un maillage irrégulier,
- le même calcul résolu avec l'algorithme stationnaire passage par passage, qui donne directement la réponse de la structure au moment où le chargement se trouve au milieu du maillage. Le calcul effectué par ligne de courant prend en compte le fait que le chargement s'est déplacé de la gauche vers sa position finale. On note que le calcul s'est effectué sur un maillage avec des tailles de maille irrégulières, ce qui permet de bien évaluer les gradients mécaniques sous le chargement, tout en économisant du temps de calcul et de l'espace disque grâce aux éléments plus grossiers dans les zones à faibles gradients mécaniques.

Le calcul T.R.C. sur le maillage irrégulier dure 133 s CPU, tandis que le calcul stationnaire est très court : 25 s CPU. La valeur résiduelle constante obtenue avec l'algorithme stationnaire ( $\epsilon_{yy}^p = 1.03 \cdot 10^{-4}$ ) est très proche de celle atteinte avec le calcul T.R.C. ( $\epsilon_{yy}^p = 1.04 \cdot 10^{-4}$ ). L'efficacité de la méthode stationnaire justifie amplement son utilisation dès lors que les hypothèses de l'algorithme sont respectées. L'algorithme T.R.C. doit, quant à lui, être utilisé à chaque fois que le chargement varie au cours d'un passage.

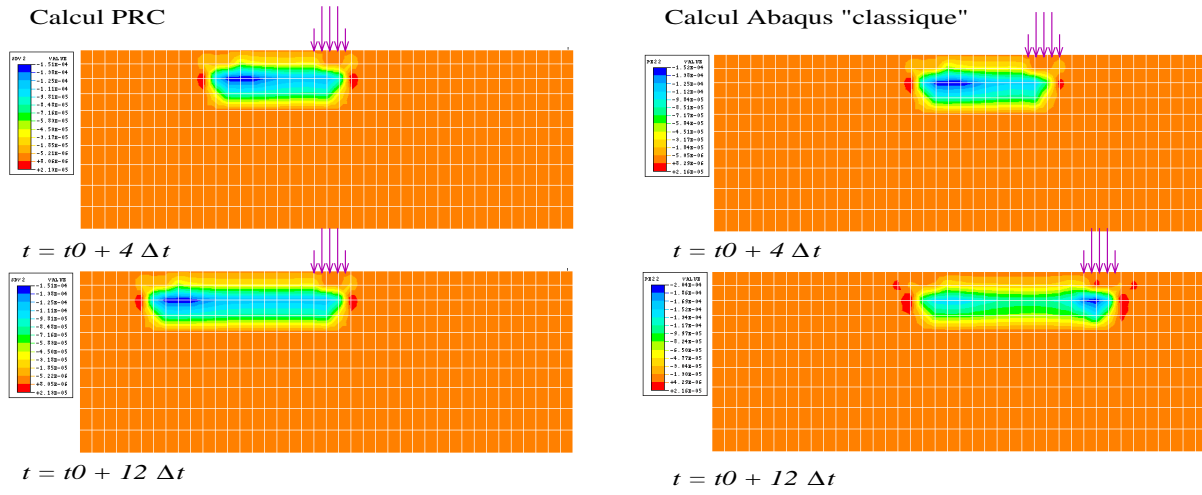


FIG. 2.11: Comparaison de calculs : déformations plastiques selon  $\mathbf{e}_y$

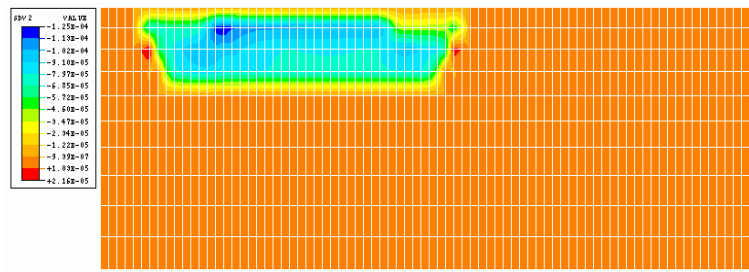


FIG. 2.12: Calcul TRC avec un maillage fin

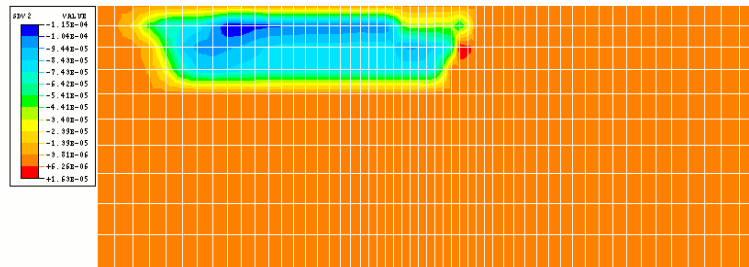


FIG. 2.13: Calcul TRC avec un maillage irrégulier

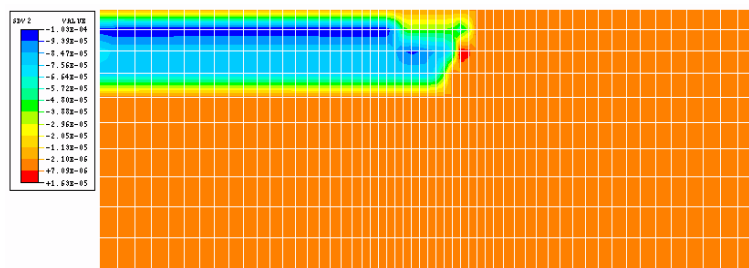


FIG. 2.14: Calcul stationnaire pour un passage de chargement

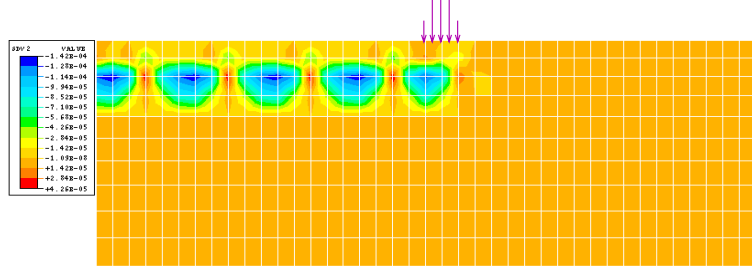


FIG. 2.15: Calcul TRC avec un chargement d'amplitude variable

### 2.6.2.2 Comparaison d'un calcul stationnaire passage par passage et d'un calcul stationnaire direct

Dans cette partie, on compare l'algorithme stationnaire passage par passage avec l'algorithme stationnaire direct. Les calculs montreront l'extrême rapidité du calcul direct. Cependant, celui-ci ne peut être appliqué que si l'on soumet la structure à des cycles de chargement identiques. De plus, les résultats montreront que le calcul direct donne une très bonne évaluation de la réponse stabilisée de la structure si celle-ci s'accommode. Si par contre, elle s'adapte, une légère différence peut être observée entre les solutions obtenues avec les deux calculs stationnaires.

La validation de la méthode stationnaire directe est effectuée avec les données des calculs présentés par Dang Van et Maitournam [26]. On considère un volume semi-infini défini par  $y \leq 0$ , occupé par un matériau élastoplastique de von Mises à écrouissage cinématique linéaire. Un cylindre élastique infini roule sur le volume. On considère que le chargement vu par la structure est un contact de Hertz. La distribution de pression est semi-elliptique et son expression est :

$$P(x) = P_o \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{pour } |x| \leq a$$

L'effort tangentiel est :

$$\tau(x) = fP(x) \quad \text{pour } |x| \leq a$$

où  $a$  est donc la demi-longueur de la zone de contact et  $f$  le coefficient de frottement.

D'après les travaux de Johnson [45], en l'absence de frottement, c'est-à-dire lorsque  $f = 0$ , pour un matériau parfaitement plastique de Mises dont la limite d'élasticité en cisaillement est  $k$ , on a une réponse :

- élastique si  $P_o/k < 3,1$
- stabilisée adaptée si  $3,1 \leq P_o/k \leq 4$
- de type rochet plastique si  $4 < P_o/k$

Pour un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire, on a une réponse :

- élastique si  $P_o/k \leq 3,1$
- stabilisée adaptée si  $3,1 < P_o/k \leq 4$
- stabilisée accommodée si  $4 < P_o/k$

En présence de frottement, le comportement asymptotique du matériau est résumé dans le diagramme (2.16).

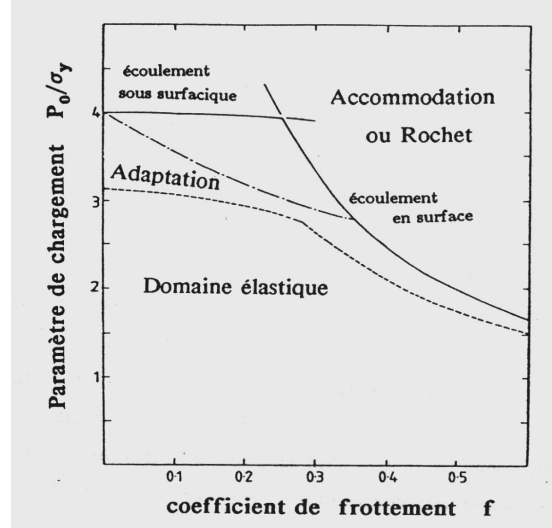


FIG. 2.16: Domaines d'adaptation et d'accommodation d'après K.L. Johnson

Il s'agit maintenant d'évaluer numériquement la réponse stabilisée de la structure quand elle est soumise à un contact de Hertz pour lequel  $f = 0$ . On étudie deux cas :

- dans le calcul (a), le rapport  $P_o/k = 3,5$  ;
- dans le calcul (b), le rapport  $P_o/k = 5$ .

Le calcul est bidimensionnel. La structure est représentée par un rectangle maillé en 1258 quadrilatères à quatre points de gauss. Le modèle contient 4050 degrés de liberté. Les coefficients relatifs au matériau sont donnés dans le tableau suivant :

module de Young	$E = 207 \text{ GPa}$
coefficient de poisson	$\nu = 0.3$
limite d'élasticité en traction	$\sigma_y = 275,6 \text{ MPa}$
coefficient d'écrouissage	$c = 69 \text{ GPa}$

Dans le cas (a), le calcul stationnaire passage par passage montre que la structure se stabilise après deux cycles. En effet, les déformations plastiques deviennent constantes après le second passage. Elles sont également constantes par ligne de courant (figure

2.17), ce qui signifie que la structure s'adapte. Ce résultat est bien conforme à ceux trouvés par Dang Van et Maitournam, ainsi qu'au diagramme de Johnson. Le calcul direct montre également que le comportement stabilisé est adapté. Les valeurs des déformations plastiques sont cependant sous-évaluées par le calcul direct. Les courbes  $(\sigma_{xy}, \epsilon_{xy}^p)$  sont données dans la figure 2.18 pour le calcul stationnaire direct et passage par passage. Les valeurs obtenues par Dang Van et Maitournam sont données dans la figure 2.19. Le calcul stationnaire passage par passage dure 121s CPU, et le direct dure 17s CPU.

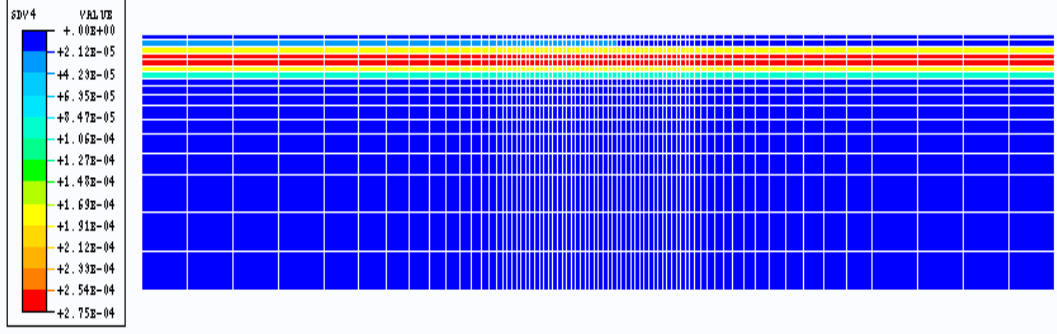


FIG. 2.17: Cas (a) : déformations plastiques de cisaillement  $2\epsilon_{xy}^p$  après le second passage

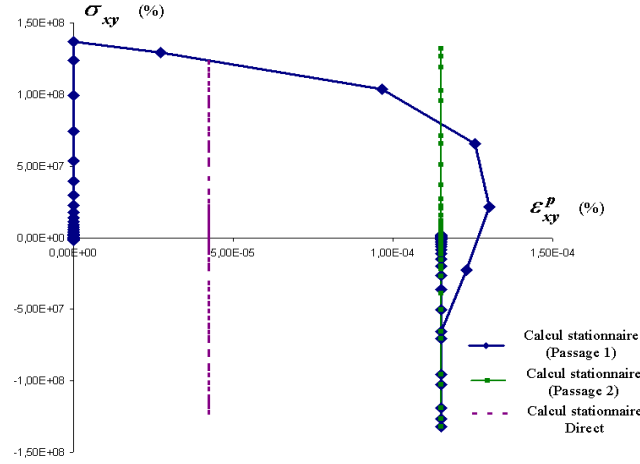


FIG. 2.18: Cas (a) :  $\sigma_{xy}$  en fonction de  $\epsilon_{xy}^p$ , d'après le calcul sous *Abaqus*

Dans le cas (b), le calcul stationnaire passage par passage montre que la structure se stabilise après 17 cycles. Les déformations plastiques ne sont pas constantes par ligne de courant mais la valeur en amont est égale à celle en aval (figure 2.21), ce qui témoigne du comportement accommodé de la structure. Ce résultat est bien conforme à ceux trouvés par Dang Van et Maitournam, ainsi qu'au diagramme de Johnson. Le calcul direct montre également que le comportement stabilisé est accommodé. Les valeurs des déformations plastiques obtenues par le calcul direct sont semblables à celles obtenues par le calcul passage par passage. Les courbes  $(\sigma_{xy}, \epsilon_{xy}^p)$  sont données dans la figure 2.22 pour le calcul stationnaire direct et passage par passage. Le calcul stationnaire passage par passage dure 1125s CPU, et le direct dure 33s CPU. Dans cet exemple, l'efficacité du calcul direct est clairement mise en évidence.

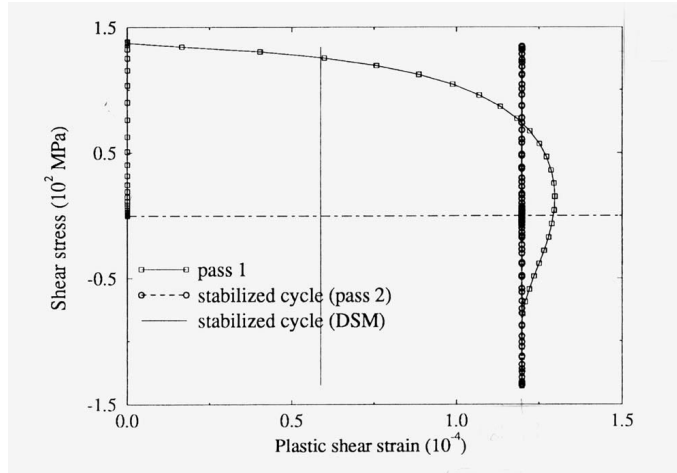


FIG. 2.19: Cas (a) :  $\sigma_{xy}$  en fonction de  $\epsilon_{xy}^p$ . d'après le calcul de Maitournam

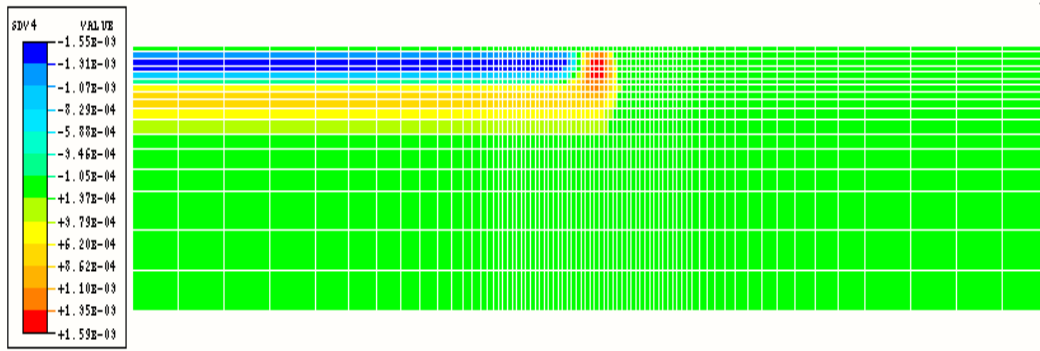


FIG. 2.20: Cas (b) : déformations plastiques de cisaillement  $2\epsilon_{xy}^p$  après le premier passage

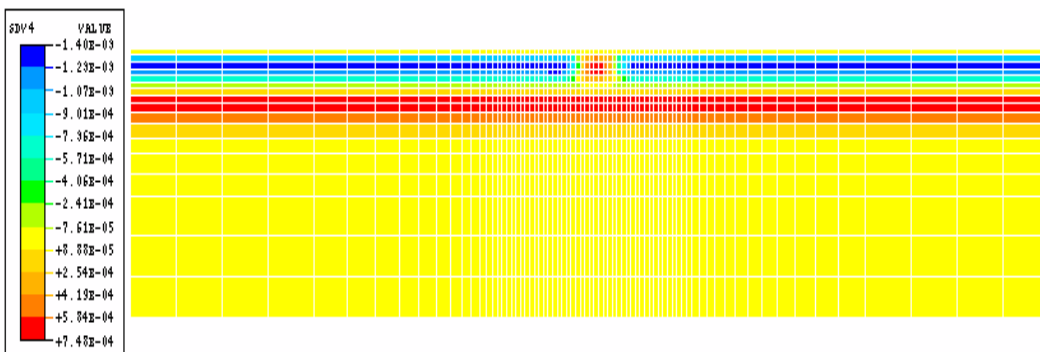


FIG. 2.21: Cas (b) : déformations plastiques de cisaillement  $2\epsilon_{xy}^p$  après le 17ème passage

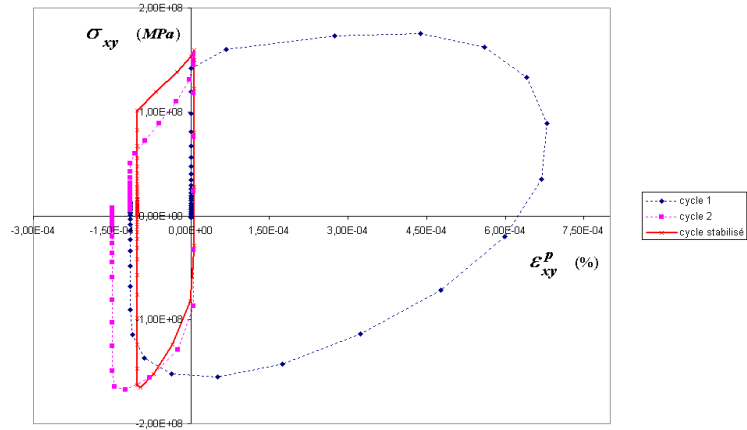


FIG. 2.22: Cas (b) : contraintes  $\sigma_{xy}$  en fonction des déformations plastiques  $\epsilon_{xy}^p$

### 2.6.2.3 Intérêts des algorithmes stationnaires

Finalement, on peut conclure sur les avantages des algorithmes stationnaires développés :

- les domaines où les efforts et les conditions aux limites sont imposés sont fixes. La mise en œuvre de l'analyse est donc simple ;
- pour des structures très longues, on s'affranchit des effets de bords ;
- le maillage peut n'être fin que sous le chargement ; le calcul est donc plus efficace en terme de précision/temps de calcul. De même que pour l'algorithme T.R.C., le gain en temps n'est pas optimisé à cause des difficultés de programmation dans *Abaqus*.
- Un seul calcul itératif stationnaire permet la détermination de la solution après un passage de chargement (avec l'algorithme stationnaire passage par passage). La méthode est donc extrêmement performante par rapport à un calcul transitoire.
- Les variations de l'amplitude et de la vitesse du chargement d'un passage à l'autre peuvent être simulées avec l'algorithme stationnaire passage par passage.
- Le calcul stationnaire direct est encore plus rapide mais il ne peut être appliqué que si la structure est soumise aux passages successifs d'un même chargement. Les résultats obtenus sont meilleurs quand la structure s'accommode.

### 2.6.3 Validation de l'algorithme stationnaire thermique

Des corrélations dans le cas de problèmes thermiques ont été réalisées par Maitournam [59]. Il a comparé des solutions analytiques aux résultats numériques obtenus par les calculs stationnaires, dans le cas d'une source ponctuelle ou linéique se déplaçant sur un plan à vitesse constante, ou d'une source se déplaçant sur un milieu compris entre deux droites parallèles. Les calculs stationnaires effectués dans *Abaqus* sur ces mêmes exemples ont donné des résultats similaires à ceux de Maitournam. Ils ne sont pas présentés ici.



## 2.7 Cas particulier des structures périodiques

### 2.7.1 Contexte industriel

Comme il a été mentionné dans la partie 1, les disques de frein automobiles peuvent être ventilés. Il est donc important que les méthodes développées soient applicables à ces structures. Or, l'algorithme stationnaire n'est utilisable que si le volume de la structure étudiée est généré par la translation ou la rotation d'une section 2D constante. En d'autres termes, la structure doit être cylindrique ou torrique. En effet, le calcul repose sur des formulations non locales : l'état d'un élément de matière dépend de l'élément voisin. Or dans une structure ventilée comme le disque de frein, l'élément voisin en question peut "tomber" dans un vide. L'algorithme stationnaire ne peut donc pas être appliqué tel quel. De nombreuses autres structures peuvent être qualifiées de "périodiques". Par exemple, les pneus comportent des motifs cycliques sur leur rayon extérieur qui rompent la symétrie de la pièce. Historiquement, la première application industrielle de l'algorithme stationnaire a été le rail de chemin de fer [59]. Si on désire maintenant modéliser le système rail/traverse/ballast, qui est un système de géométrie cyclique, il est également nécessaire d'adapter l'algorithme stationnaire.

### 2.7.2 Positionnement du problème

L'objectif est donc de mettre en place une méthode de calcul des structures périodiques soumises à des chargements mobiles. On entend par structures périodiques des structures cylindriques ou torriques qui contiennent des cellules inhomogènes qui sont répétées plusieurs fois. A cause de cette inhomogénéité, l'état thermomécanique de la structure ne sera pas le même selon la position du chargement par rapport à une cellule de base. Sur la figure (2.23), on représente une structure inhomogène soumise à un chargement qui se déplace selon la direction  $\mathbf{e}_y$ . Des calculs statiques montrent que l'état de contrainte de la structure n'est pas le même lorsque le chargement est à la position  $P_0$  ou  $P_2$ .

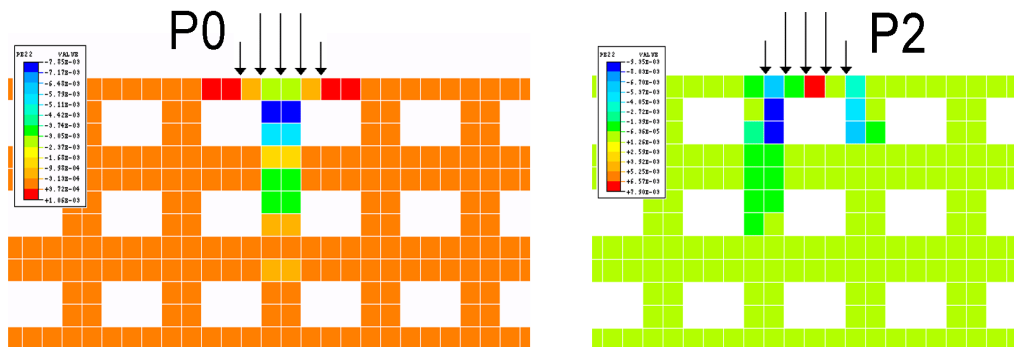


FIG. 2.23: isovaleurs de déformations plastiques d'une cellule soumise à un chargement, à deux positions différentes

### 2.7.3 Principe de l'algorithme périodique

La philosophie de l'algorithme est de supposer que le chargement s'est déplacé sur une distance suffisamment grande pour que la réponse de la structure soit devenue périodique dans le repère du chargement. Ainsi, on peut se limiter à la détermination de la solution transitoire sur une période de temps qui correspond au temps nécessaire au chargement pour parcourir une cellule. Comme dans le cas de l'algorithme stationnaire appliqué au problème de chargement mobile sur un solide homogène, l'état mécanique en un point d'une cellule dépend de celui des cellules en amont. Ceci constitue le fondement de l'algorithme proposé.

Ce dernier reposera donc sur le principe que le problème est stationnaire à l'échelle de la structure qui est composée de cellules toutes identiques, mais transitoire à l'échelle de la cellule. Cela signifie que le calcul doit prendre en compte l'évolution transitoire de la réponse thermomécanique de la structure lorsque le chargement se déplace sur une distance équivalente à celle d'une cellule, mais que dans le repère du chargement, le régime est périodique. La période correspond au temps de déplacement du chargement sur une cellule.

### 2.7.4 Equations du problème et résolution

La mise en équation du problème doit donc prendre en compte deux propriétés :

- sur chaque intervalle de temps de période  $T$ , où  $T$  est le temps mis par le chargement pour se déplacer sur une distance  $X$  équivalente à celle d'une cellule, la solution est transitoire ;
- dans le repère du chargement, la solution devient périodique.

En d'autres termes, on a :

$$\exists T, \forall t, \forall \tau \in [t, t + T] \quad \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau) \quad (2.18)$$

$$\exists t^*, \forall t > t^* \quad \mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}(x + X, t + T) \quad (2.19)$$

Il s'agit maintenant de résoudre le problème élastoplastique périodique à charge mobile pour une structure périodique. On suppose connu l'état de la structure au temps  $t_o$ , quand le chargement n'est pas encore imposé. On cherche l'état mécanique de toute la

structure au moment où le chargement se trouve à une position  $P$ , en considérant qu'il a parcouru toute la structure jusqu'à cette position. Cette position  $P$  correspond à un instant pris entre le temps  $t$  et  $t + T$ . Cette période de temps est discrétisée en plusieurs incréments de temps  $\Delta t$ , de sorte que les instants pour lesquels l'état de la structure est recherché sont les  $t + j\Delta t$  avec  $j \in \{0, 1, \dots, (m-1)\}$  où  $m\Delta t = T$  (fig. 2.24). Le problème est transitoire ; la résolution d'un instant  $t + j\Delta t$  en fonction de l'instant  $t + (j-1)\Delta t$  ne présente aucune difficulté. L'état de l'instant  $t$  va par contre dépendre de celui à l'instant  $t + T$ , étant donné la propriété de périodicité.

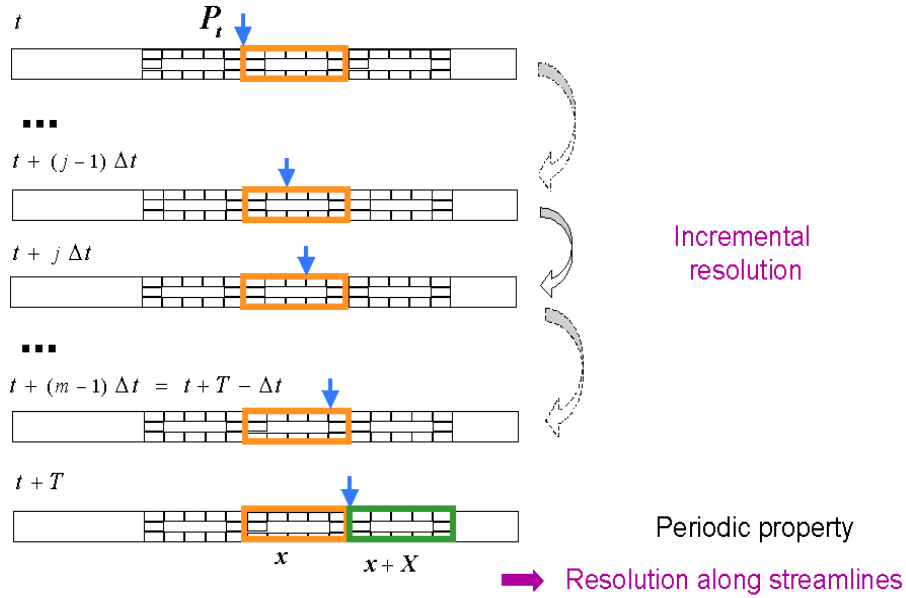


FIG. 2.24: Schéma de l'algorithme périodique

On note pour chaque quantité tensorielle  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{ini}}$  sa valeur initiale au temps  $t_o$ ,  $\mathbf{B}_j$  sa valeur au temps  $t + j\Delta t$ . On note  $\Delta_j \mathbf{B}$  l'incrément de  $\mathbf{B}$  entre les instants  $t + (j-1)\Delta t$  et  $t + j\Delta t$ .

Pour tout instant  $t + j\Delta t$ , avec  $j \neq 0$ , les tenseurs mécaniques s'écrivent en fonction des valeurs prises au temps  $t + (j-1)\Delta t$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } \|\xi_j^*\| > k, & \text{il y a plastification,} \\ & \epsilon_j^p = \epsilon_{ini}^p + \epsilon_{j-1}^p + \frac{1}{(2\mu+H)} \left(1 - \frac{k}{\|\xi_j^*\|}\right) \xi_j^* \\ \text{si } \|\xi_j^*\| \leq k, & \text{il n'y a pas de plastification,} \\ & \epsilon_j^p = \epsilon_{ini}^p + \epsilon_{j-1}^p \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \xi_j^* = s_{j-1} - H \epsilon_{j-1}^p + 2\mu \Delta_j \mathbf{e}$$

$$\sigma_j = \sigma_{ini} + \mathbf{L} : (\epsilon_j - \epsilon_j^p)$$

Dans le cas où  $j = 0$ , on a :

$$\Delta_o \epsilon(x) = \epsilon(x, t) - \epsilon(x, t - \Delta t)$$

D'après la condition de périodicité (2.19), l'expression devient :

$$\Delta_o \epsilon(x) = \epsilon(x, t) - \epsilon(x + X, t + (m - 1)\Delta t)$$

De même, la condition de périodicité permet d'écrire :

$$\epsilon_{-1}^p(x) = \epsilon_{m-1}^p(x + X)$$

puisque  $\epsilon_{ini}^p(x) = \epsilon_{ini}^p(x + X)$ .

Ainsi, pour le cas où  $j = 0$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } \|\xi_o^*\| > k, & \text{il y a plastification,} \\ & \epsilon_o^p = \epsilon_{ini}^p + \epsilon_{m-1}^p(x + X) + \frac{1}{(2\mu+H)} \left(1 - \frac{k}{\|\xi_o^*\|}\right) \xi_o^* \\ \text{si } \|\xi_o^*\| \leq k, & \text{il n'y a pas de plastification,} \\ & \epsilon_o^p = \epsilon_{ini}^p + \epsilon_{m-1}^p(x + X) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \xi_o^* = s_{m-1}(x + X) - H \epsilon_{m-1}^p(x + X) + 2\mu \Delta_o \mathbf{e}$$

$$\sigma_o = \sigma_{ini} + \mathbf{L} : (D_o \epsilon - D_o \epsilon^p)$$

Cette méthode de résolution permet de déterminer entièrement l'état de la structure entre les instants  $t$  et  $t + (m - 1)\Delta t$ , sans que l'état de la structure soit nécessairement connu entre les instants  $t_o$  et  $t$ . La méthode s'apparente donc complètement à l'algorithme stationnaire. On remarque que le calcul doit être effectué par ligne de courant, puisque la détermination des champs mécaniques en un point  $x$  dépend des valeurs de ces champs au point  $x + X$ . Comme pour la méthode stationnaire "classique", on supposera connu l'état initial des éléments en début de ligne de courant. La différence entre cet algorithme stationnaire périodique et l'algorithme stationnaire "classique" réside dans le fait que l'on

effectue une analyse transitoire entre les instants  $t$  et  $t + (m - 1)\Delta t$ . On remarque que les différents instants  $t + j\Delta t$  doivent être traités simultanément et non les uns après les autres. En effet, la solution en un instant  $t + j\Delta t$  dépend de celle en  $t + (j - 1)\Delta t$  pour  $j > 0$ , mais la solution à l'instant  $t$  dépend de celle en  $t + (m - 1)\Delta t$ .

Aux difficultés précédemment énoncées pour la programmation des algorithmes T.R.C. et stationnaires, s'ajoute celle de devoir gérer  $m$  positions de chargement simultanément. Grâce à des "astuces" numériques, l'algorithme stationnaire périodique a été implémenté dans le code de calcul *Abaqus* par l'intermédiaire de la *user subroutine* UMAT. Les résultats obtenus sur une structure bidimensionnelle sont présentés dans la partie suivante.

### 2.7.5 Validation sur structure 2D

On présente un calcul d'une structure rectangulaire composée d'un matériau élastoplastique de Mises avec un écrouissage cinématique linéaire. Elle est composée de 10 lignes de courant horizontales, constituées elles-mêmes de 16 cellules inhomogènes chacune (figure 2.25). Les coefficients mécaniques sont présentés dans le tableau suivant :

module de Young	$E = 210 \text{ GPa}$
coefficient de poisson	$\nu = 0,27$
limite d'élasticité en traction	$\sigma_y = 240 \text{ MPa}$
coefficient d'écrouissage	$c = 12 \text{ GPa}$

La structure est rectangulaire et maillée en 2 240 éléments linéaires à 4 points de gauss. Le nombre de degrés de liberté est de 9 003. Dans le repère du chargement, la vitesse de translation de la structure est  $V = -1 \text{ ms}^{-1}$ . On impose un chargement nodal sur 5 nœuds selon la direction  $-\mathbf{e}_y$ , d'amplitude  $F = 30 \text{ MN}$  pour les trois nœuds au centre et  $F = 15 \text{ MN}$  pour les deux nœuds extérieurs. Les nœuds qui composent la base inférieure de la structure sont bloqués en  $y$  et les cinq nœuds du bord droit les plus bas sont bloqués en  $x$ .

Trois différents calculs ont été réalisés :

- Un calcul élastoplastique incrémental "classique". Le chargement est translaté d'une distance équivalente à la taille d'une maille à chaque nouvel incrément de temps. Le calcul comporte 54 incréments de temps. Les isovaleurs des déformations plastiques selon la direction  $\mathbf{e}_y$  avec le chargement à la position  $P_o$  sont présentées dans la figure (2.26).

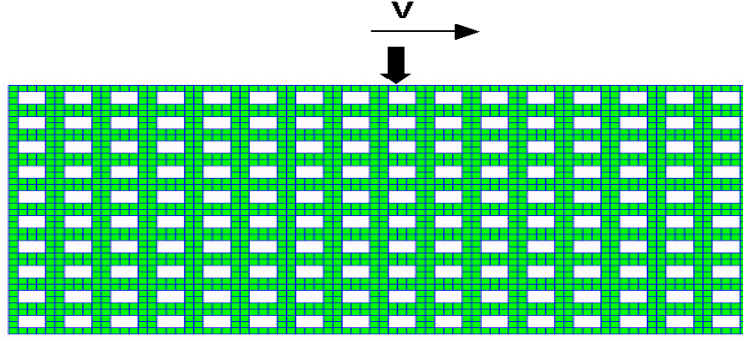


FIG. 2.25: Maillage de la structure périodique 2D

- Le même calcul avec l'algorithme stationnaire classique pour structure homogène. On considère que l'élément voisin d'un élément se trouvant à l'abscisse  $x$  est celui qui se trouve à  $x + X$ . On ne prend pas en compte l'influence du déplacement du chargement de la position  $P_t$  à  $P_{t+T}$ . Les isovaleurs des déformations plastiques selon la direction  $\mathbf{e}_y$  avec le chargement à la position  $P_o$  sont présentées dans la figure (2.28).
- Le même calcul avec l'algorithme stationnaire périodique. Ce calcul prend en compte l'évolution de la réponse de la structure quand le chargement passe de la position  $P_t$  à  $P_t + T$ . Les isovaleurs des déformations plastiques selon la direction  $\mathbf{e}_y$  avec le chargement à la position  $P_o$  sont présentées dans la figure (2.27).

Les résultats montrent une parfaite adéquation entre la solution incrémentale classique et la solution stationnaire périodique, si on néglige les éléments près des frontières qui subissent des effets de bord. En effet, la valeur résiduelle obtenue sur l'élément central de chaque cellule de la première ligne de courant est  $\epsilon_{22}^p = 5.10^{-3}$  pour les deux calculs. Dans la figure (2.30), on donne les valeurs des déformations plastiques de cisaillement  $\epsilon_{xy}^p$  d'une particule de matière se trouvant sur la première ligne du maillage obtenues avec le calcul incrémental classique. Sont également données les valeurs obtenues avec le calcul stationnaire périodique correspondant à cette même particule. Il s'agit donc de valeurs prises le long de la première ligne de courant, dans l'ordre indiqué sur le schéma (2.29). Les courbes montrent que le calcul stationnaire périodique permet une très bonne évaluation des champs mécaniques de la structure. Par contre, les résultats montrent que la méthode stationnaire "classique" n'est pas satisfaisante car la valeur résiduelle obtenue est  $\epsilon_{22}^p = 1,69.10^{-3}$ . Cet exemple montre la nécessité d'utiliser l'algorithme stationnaire périodique dès lors que la structure n'est pas cylindrique ou torrique. Si l'on s'affranchissait de certaines difficultés numériques en disposant des codes source d'*Abaqus*, le gain de temps de calcul serait intéressant. En effet, on estime que le calcul stationnaire périodique durerait environ 250s CPU, alors que le calcul incrémental dure 480s CPU.

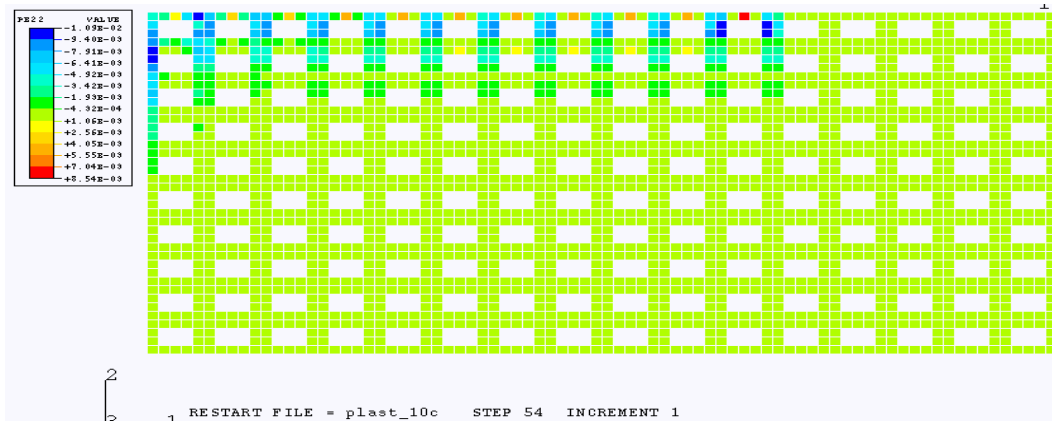


FIG. 2.26: Calcul incrémental classique : déformations plastiques selon  $\mathbf{e}_y$

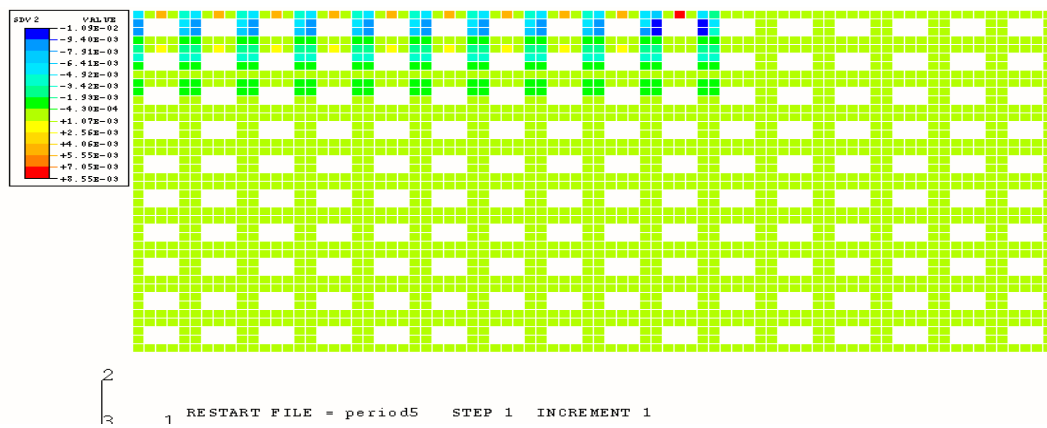


FIG. 2.27: Calcul stationnaire périodique : déformations plastiques selon  $\mathbf{e}_y$

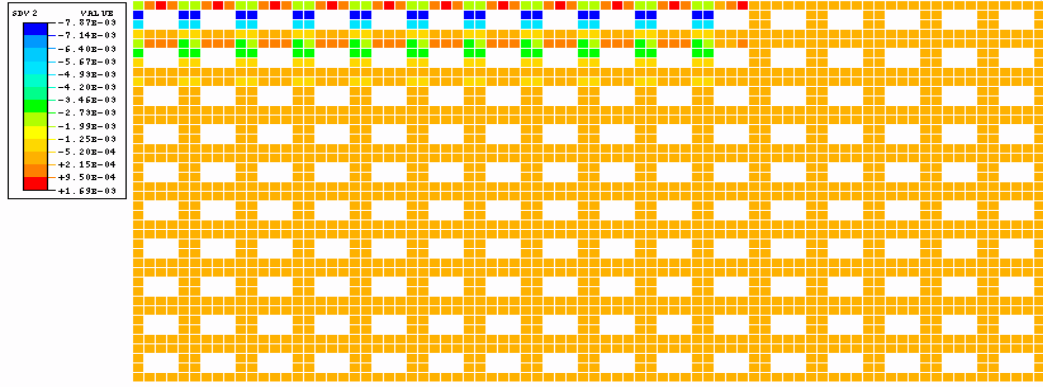


FIG. 2.28: Calcul stationnaire classique : déformations plastiques selon  $\mathbf{e}_y$

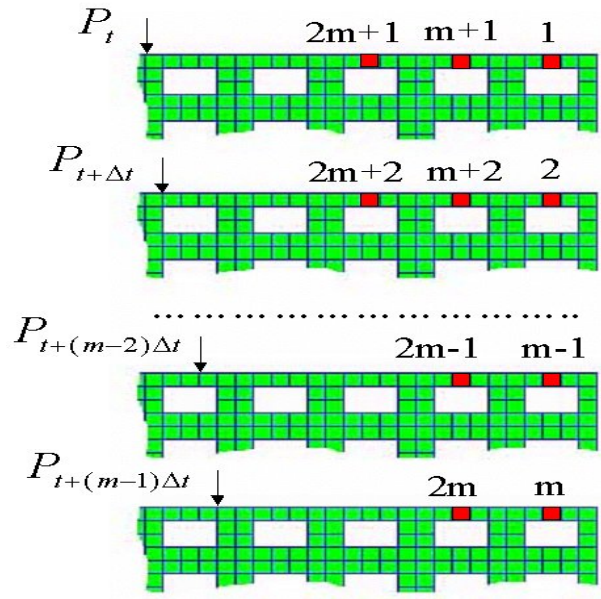


FIG. 2.29: Méthode stationnaire périodique : ordre des positions géométriques d'une particule matérielle

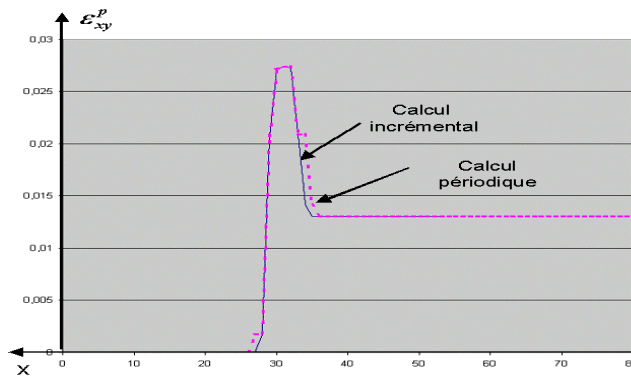


FIG. 2.30: Déformations plastiques  $2\epsilon_{xy}^p$  le long d'une ligne de courant





# Chapitre 3

## Dimensionnement des disques de frein

### 3.1 L'approche globale de dimensionnement des disques de frein

Afin d'étudier la tenue en service des disques de frein, il est nécessaire de mettre en œuvre une méthode prédictive de dimensionnement qui soit suffisamment fiable et robuste. Pour ce faire, il est essentiel d'analyser le problème dans sa globalité. La démarche adoptée, l'**approche globale de dimensionnement des structures** [16], repose sur l'étude conjointe de quatre points différents :

- la modélisation des chargements et des conditions aux limites imposés à la structure ;
- la modélisation du comportement mécanique du matériau ;
- l'identification des endommagements subis par la structure et celle des paramètres qui les quantifient ;
- l'élaboration d'un critère de ruine pour chaque type d'endommagement.

Tous ces aspects du problème doivent être étudiés avec un même degré de précision car il serait complètement inutile, par exemple, de calculer les champs mécaniques dans la pièce si l'on ne sait pas comment analyser les résultats.

#### 3.1.1 Stratégie de modélisation

Pour la prédiction de la tenue en service des disques de frein, la stratégie de modélisation consiste en l'étude d'un freinage de sévérité représentative de la vie des pièces. L'objectif est ensuite de déterminer le cycle stabilisé de la structure lorsqu'elle est soumise à ce freinage. Pour ce faire, il faudra d'abord identifier le comportement stabilisé

du matériau lorsqu'il est sollicité cycliquement. Enfin, un critère de sévérité justifiée doit permettre de prédire la tenue du disque.

### 3.1.2 Modélisation du système

La modélisation du système, c'est-à-dire des chargements et des conditions aux limites imposés à la structure, est un point très délicat du dimensionnement des disques de frein. Les difficultés sont de deux types :

- les cycles de chargement qui sont imposés à un disque de frein sont tous différents les uns des autres ;
- pour un freinage donné, la modélisation des chargements et des conditions aux limites n'est pas aisée.

#### 3.1.2.1 Diversité de freinages et approche statistique

Afin de garantir la tenue d'un disque de frein en clientèle, il est nécessaire de tenir compte des remarques suivantes :

- tous les clients sont différents ;
- les routes empreintées sont diverses et variées (autoroute, route, ville, campagne, montagne, etc.) ;
- les conditions sont multiples (pluie, gel, etc.).

De ce fait, les freinages vécus par un disque sont très variés. Ainsi, les bureaux d'étude s'attachent à classer les freinages en différentes catégories afin d'étudier le comportement du système de freinage lorsqu'il est soumis à ces diverses sollicitations. Il existe alors différentes séries d'essais que l'on simule sur banc pour dimensionner un disque. Ces essais varient selon le but recherché.

Par exemple, les essais dits *à rupture* tentent de soumettre le disque à des conditions de **freinage très sévères** pour s'assurer que la pièce résiste à des sollicitations difficiles et peu ordinaires. A PSA, ils consistent à imposer 20 fois de suite une série de 3 freinages à couple constant, avec une vitesse initiale correspondant à la vitesse maximale du véhicule étudié. Entre deux séries de freinage, on laisse le disque refroidir jusqu'à une température prédéfinie. Afin de tester l'**efficacité de freinage d'un disque à chaud** (étude du fading), les journalistes ont proposé un essai appelé *AMS*, qui consiste à amener le véhicule à une vitesse égale à 100 km/h avec une accélération maximale, puis à le freiner avec le pied au plancher. Ce cycle est répété 10 fois. Chez les constructeurs automobiles, la perte d'efficacité de freinage à chaud est étudiée par des *freinages d'évanouissement*. Il s'agit d'imposer 30 freinages avec une vitesse initiale de 120 km/h et une décélération constante

à 0,5g. Un autre type d'essai simulé chez les constructeurs automobiles consiste à des freinages dits *de maintien*. La vitesse de rotation du disque est maintenue constante et on applique une faible pression hydraulique dans le piston pour représenter les situations de longue descente. Les durées de freinage sont en général longues. Le but est de s'assurer que le liquide de frein ne chauffe pas trop (étude du **vapor-lock**). Il existe aussi des essais sur véhicule et sur route réels. Bien sûr, ces essais sont plus coûteux. Les conditions de freinage sont moins facilement contrôlables et les moyens de mesure sont plus restreints. Par contre, ces essais sont plus représentatifs de la vie d'un disque de frein en clientèle. On peut laisser un véhicule à la disposition d'un conducteur quelconque pendant un certain nombre de jours ou bien tester le véhicule sur des circuits (circuit de Belchamp, descente du mont Ventoux, etc.).

L'objectif de cette étude est d'étudier la **tenue en service** des disques de frein. Il est donc essentiel de dimensionner les disques en tenant compte de tous les freinages qu'ils subissent au cours de leur vie. Bien sûr, même si l'on savait définir ces freinages, il serait tout à fait irréaliste de les simuler tous. Il est donc naturel d'aborder le problème d'une façon probabiliste. L'*approche fiabiliste* adoptée consiste à définir les conditions de chargement les plus représentatives de la clientèle. Cette représentativité est évaluée en terme de dommage équivalent. Cela signifie que l'on recherche un freinage dit "équivalent" qui, répété  $n$  fois, produirait le même endommagement que tous les cycles quotidiennement vécus par le disque. La détermination de ce cycle équivalent permet alors de ne simuler qu'un seul type de freinage. La recherche de ce dernier repose sur différents concepts non abordés dans ce travail. Une fois que ce cycle équivalent est déterminé (à partir d'enquêtes clientèles), il est imposé autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir une réponse stabilisée du disque. Cette notion de *cycle stabilisé* est essentielle dans cette approche. Etant donné la diversité des freinages, on propose toutefois de les classer selon différentes catégories et de rechercher un freinage équivalent pour chaque classe de freinage. Cette distribution est proposée en fonction de la sévérité des freinages du point de vue de l'endommagement. Un exemple de classification pourrait être le suivant :

- freinages quotidiens : ce sont les freinages que chaque conducteur effectue régulièrement. Le nombre de cycles effectués dans la vie d'un frein est d'environ  $5.10^6$ . Ces freinages engendrent de la fatigue polycyclique (fatigue à grand nombre de cycles). Parmi ces freinages, certains sont plus sévères que la moyenne. Ils se produisent quelques milliers de fois et ne doivent pas engendrer de plasticité macroscopique. En tout cas, la structure doit finir par s'adapter au bout de quelques cycles.
- freinages très sévères : ils interviennent quelques centaines de fois. Ils correspondent à des freinages qu'il vaudrait mieux éviter ou à des freinages liés à des topologies particulières (type descente du Mont Ventoux). Ils dissipent beaucoup d'énergie et engendrent de fortes variations de température inhomogènes dans le disque. L'endommagement provoqué s'apparente alors à de la fatigue thermomécanique à faible nombre cycles, encore appelée fatigue oligocyclique.

A côté de ces freinages "normaux", il existe d'autres freinages qui peuvent fortement endommager le disque mais qui ne surviennent pas de façon répétée. Ils ne sont donc

pas traités dans l'approche probabiliste de dimensionnement. Il s'agit des freinages dits *d'exception*. On propose de les classer selon 2 catégories :

- accidentel : il s'agit de freinages d'extrême urgence. On conçoit que le disque doive être changé après l'évènement, mais on lui demande de respecter entièrement sa fonction pendant l'accident. Le conducteur doit toutefois se rendre compte de la nécessité de changer le disque. Cette contrainte est difficile du point de vue du concepteur.
- incidentel : il s'agit de petits évènements qui ne doivent survenir qu'un petit nombre de fois dans la vie de la structure (une dizaine de fois environ).

### **3.1.2.2 Modélisation du chargement et des conditions aux limites pour un freinage donné**

Une fois que l'on a défini un freinage, il reste les difficultés inhérentes à la modélisation des chargements et des conditions aux limites vus par la structure. En effet, comme il a déjà été mentionné, celles-ci sont dues à :

- la rotation du disque ;
- le contact et le frottement qui sont difficiles à évaluer et qui varient au cours d'un même freinage ;
- les phénomènes thermiques transitoires, les fortes variations de température ;
- les échanges de chaleur avec l'environnement ;
- la répartition du flux de chaleur entre le disque et les plaquettes ;
- les couplages entre les phénomènes thermiques et le contact entre le disque et les plaquettes.

Les différentes études évoquées dans la partie (1) et celles que nous avons menées montrent que la réponse thermique conditionne au premier ordre la réponse mécanique du disque. Il est donc essentiel de bien évaluer les champs de température dans le disque lors d'un freinage. Ceux-ci vont fortement dépendre du chargement thermique qui est un flux de chaleur issu du frottement entre le disque et les plaquettes. Il est donc important de déterminer le flux de chaleur à partir de la nature du contact entre les pièces en question. La démarche de calcul adoptée sera alors la suivante : un calcul de contact élastique permettra d'évaluer le profil des efforts de contact sur le disque. A partir de ce résultat, on déterminera la distribution du flux de chaleur entrant dans le disque au cours du freinage. La valeur globale du flux est par contre évaluée à partir de la perte d'énergie cinétique du véhicule ou du banc. Un calcul thermique transitoire permettra de déterminer le champ de température dans le disque. Un calcul thermomécanique sera ensuite effectué, avec comme chargements, la température issue du calcul thermique et les efforts de contact issus du premier calcul.

### 3.1.3 Modélisation du matériau

L'objectif de cette partie est la modélisation du comportement mécanique de la fonte GLJ2 qui constitue les disques de frein pleins étudiés. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle simple avec peu de paramètres. Celui-ci doit permettre à la fois de décrire fidèlement le comportement du matériau dans des conditions similaires à celles rencontrées par les disques de frein en fonctionnement, et une implémentation numérique aisée qui induit des temps de calcul raisonnables.

#### 3.1.3.1 Composition du matériau

Les disques de frein étudiés sont fabriqués en fonte grise à graphite lamellaire avec une matrice perlitique (*figure 3.1*). Il s'agit de la fonte GLJ2 qui est peu onéreuse. La conductivité du matériau n'est pas excellente mais la résistance mécanique est relativement bonne (la limite à la rupture dépasse les 220 MPa). Sa composition est la suivante :

	C	Si	Mn	S	P	Cu	Ni	Cr	Mo	Ti	Sn	Al
%	3,4	2,1	0,5	0,09	0,08	0,08	0,046	0,11	0,02	0,014	0,03	0,008



FIG. 3.1: Fonte GLJ2 à graphite lamellaire

#### 3.1.3.2 Essais de traction-relaxation-recouvrance

Des essais de traction-relaxation-recouvrance ont été réalisés. Il s'agit d'essais isothermes à déformations imposées. Le but est d'étudier le comportement du matériau dans les mêmes conditions que celles d'utilisation. Pour ce faire, les essais ont été réalisés pour différentes températures. La gamme exploitée s'étend de  $20^{\circ}\text{C}$  à  $700^{\circ}\text{C}$ . Il est connu que le comportement des matériaux métalliques est viscoplastique à haute température [57]. Cette viscoplasticité induit une dépendance de la réponse à la vitesse de déformation. Pour chaque température étudiée, trois différentes vitesses de déformation ont donc été imposées :  $\dot{\epsilon} = \{10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}\}$ . La viscosité induit aussi des phénomènes de relaxation

ou de fluage. Ainsi, chaque cycle de sollicitation comporte une étape de maintien de la déformation imposée. Plus précisément, chaque cycle est composé de (*figure 3.2*) :

- une traction à vitesse de déformation constante à partir d'un état de déformation nulle jusqu'à une valeur  $\epsilon_{max}$  ;
- une relaxation (c'est-à-dire un maintien de la sollicitation à la valeur maximale  $\epsilon_{max}$  pendant trente minutes) ;
- une recouvrance (c'est-à-dire un retour à déformation nulle).

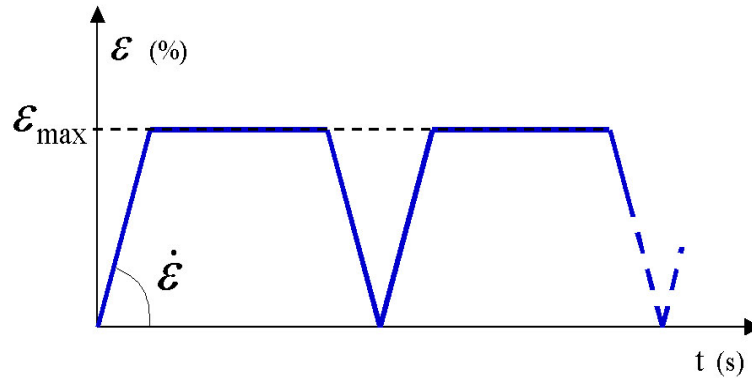


FIG. 3.2: Cycles de déformation imposée

Chaque cycle TRR est répété autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir une réponse stabilisée en contraintes. On rappelle que, dans la démarche de dimensionnement adoptée, le cycle qui est étudié est celui qui correspond à une réponse stabilisée de la structure puisque les premiers cycles ne sont pas représentatifs de la vie de la structure. Cette répétition des cycles fait l'originalité des essais. En effet, les valeurs traditionnellement disponibles dans la littérature correspondent à des essais conventionnels de traction ou de compression monotones.

Les essais ont été réalisés par CENTECH, sur une machine de traction hydraulique INSTRON 8500 de  $\pm 100 \text{ kN}$  (*figure 3.3*). L'extensométrie est composée de deux coupleaux distants de  $12,5 \text{ mm}$ . Le chauffage des éprouvettes a été réalisé grâce à un four AET à trois zones de résistance. Le pilotage en déformation et l'acquisition des données sont gérés par un ordinateur. Les éprouvettes utilisées ont été prélevées sur des disques pleins selon le schéma (3.4). Elles ont un diamètre de  $7 \text{ mm}$  et une partie utile de  $16,5 \text{ mm}$ . Cette taille d'éprouvette permet d'être représentatif de la structure.

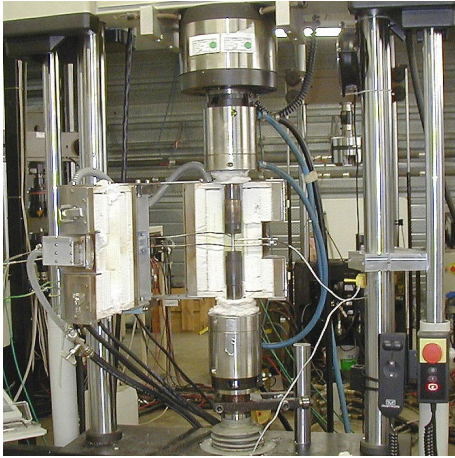


FIG. 3.3: Machine de traction

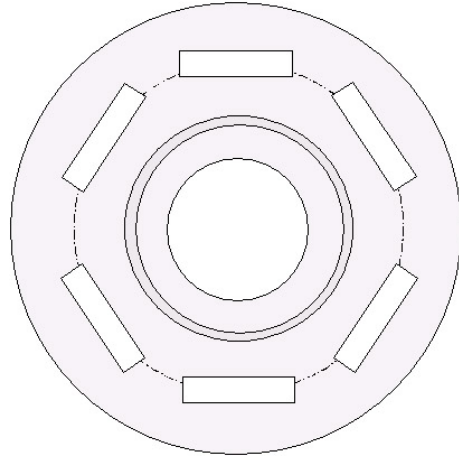


FIG. 3.4: Prélèvement des éprouvettes sur un disque de frein

### Analyse des résultats

Les résultats permettent d'abord de mettre en évidence le comportement cyclique du matériau (*figure 3.5*) : pendant les premiers cycles, les valeurs maximales des contraintes évoluent avant de se stabiliser après une dizaine ou une vingtaine de cycles, selon les conditions de l'essai.

Les phénomènes attendus de plasticité et de viscosité sont également observés. On remarque d'ailleurs un faible adoucissement cyclique avant stabilisation du comportement et un écrouissage essentiellement cinématique.

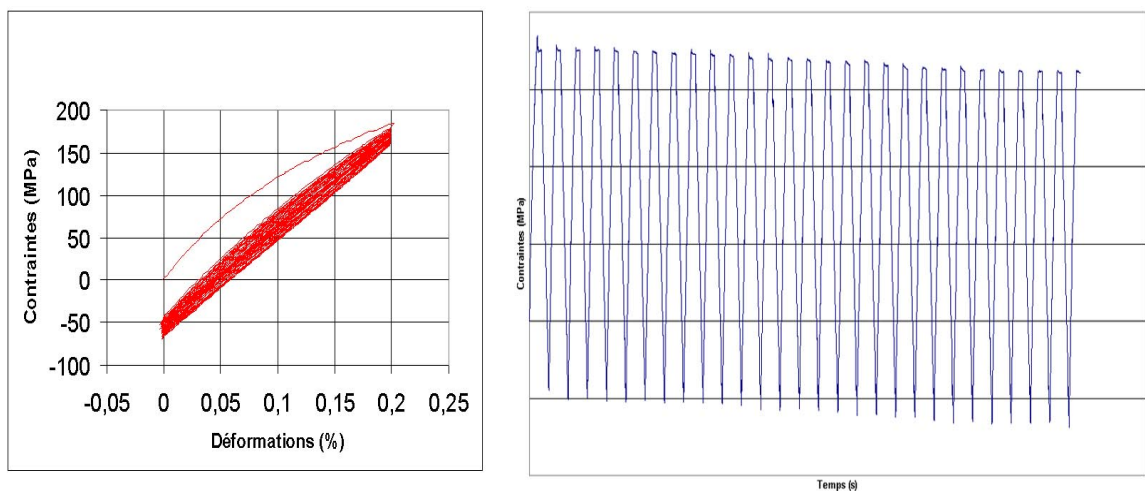


FIG. 3.5: Essai TRR à  $200^{\circ}\text{C}$  avec  $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$



Les essais mettent en évidence l'effet de la température sur les caractéristiques mécaniques conventionnelles. En effet, la figure (3.6) montre que lors d'une traction monotone effectuée avec une vitesse de déformation de  $\dot{\epsilon} = 10^{-3}$ , les valeurs maximales des contraintes sont quasiment divisées par un facteur 2 quand la température évolue de  $20^{\circ}\text{C}$  à  $600^{\circ}\text{C}$ .

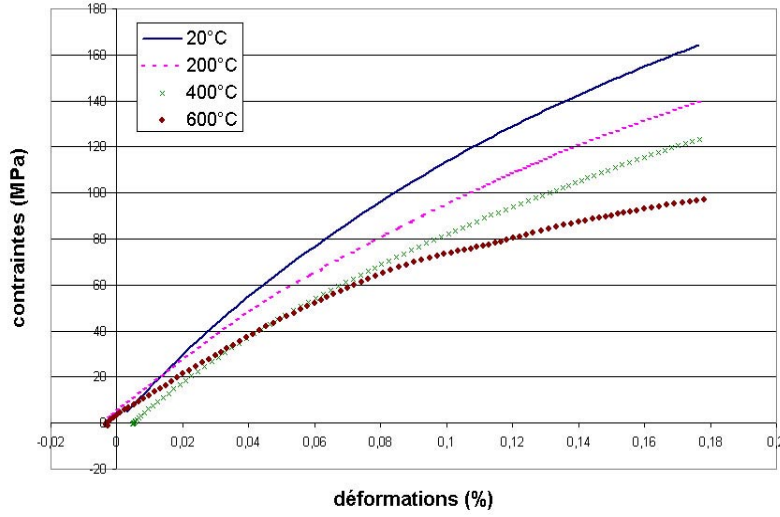


FIG. 3.6: Traction monotone à  $\dot{\epsilon} = 10^{-3}$

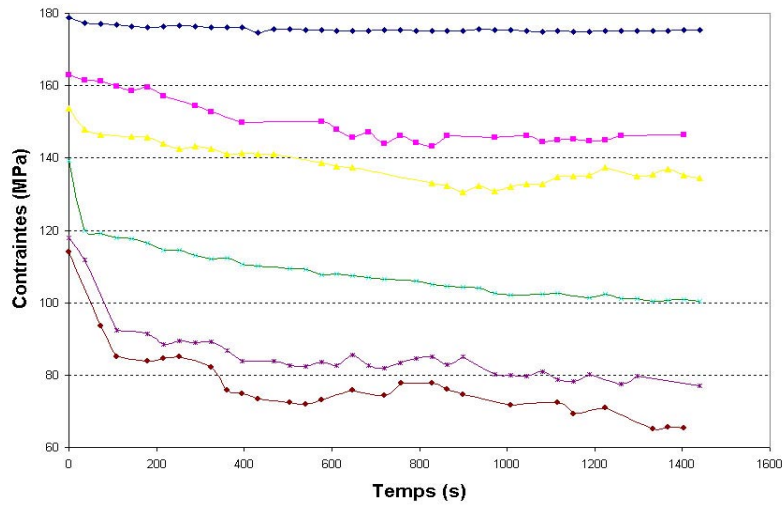


FIG. 3.7: Relaxations de contraintes pour  $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$

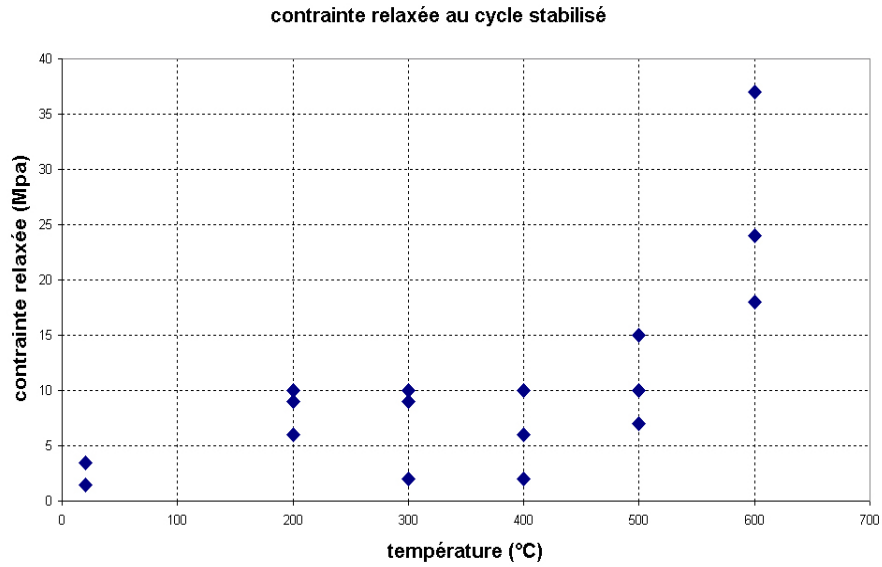


FIG. 3.8: Valeurs des contraintes relaxées en fonction de la température

Enfin, les essais permettent d'étudier l'influence de la température et de la vitesse de déformation sur le comportement visqueux de la fonte GLJ2. Sur la figure (3.7), le phénomène de relaxation est mis en évidence sur un essai à vitesse  $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$  : lors du maintien de la sollicitation à une valeur de déformation  $\epsilon_{max}$ , les contraintes décroissent doucement avant de se stabiliser vers une valeur limite. Cette relaxation des contraintes est d'autant plus marquée que la température est élevée. La figure (3.8) donne les valeurs des contraintes relaxées (il s'agit de la différence entre les contraintes maximales et les contraintes en fin de relaxation) en fonction de la température. Pour chacune d'elle, les trois valeurs correspondent aux 3 vitesses de déformations simulées. Sur la figure (3.9), on note que le rapport entre la valeur des contraintes relaxées et celle des contraintes limites atteintes après relaxation sur le cycle stabilisé croît avec la température. Ce ratio atteint une valeur de 100% entre  $500^{\circ}C$  et  $600^{\circ}C$ . Il s'agit de l'intervalle de température pour lequel le matériau passe d'un comportement essentiellement plastique à un comportement fortement visqueux.

Enfin, les résultats figurés sur cette courbe permettent de montrer l'effet de la vitesse de déformation sur les valeurs des contraintes obtenues. L'influence de ce paramètre est toutefois très faible quand la température est inférieure à  $500^{\circ}C$ . Les essais ont également montré que la relation qui relie les contraintes et la vitesse de déformation est non-linéaire. Le modèle numérique choisi devra prendre en compte cette non-linéarité.

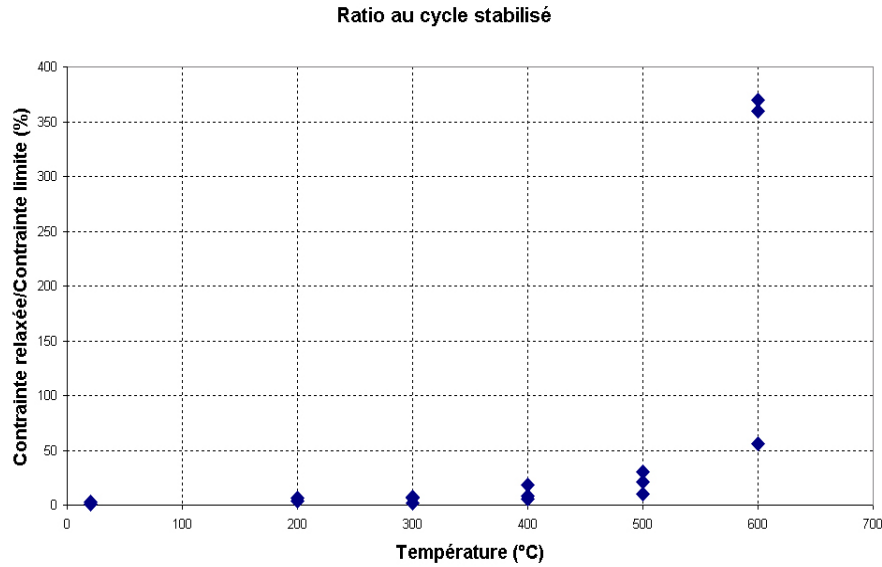


FIG. 3.9: Rapport entre les contraintes relaxées et les contraintes limites en fonction de la température

### 3.1.3.3 Modélisation du comportement

Le modèle théorique doit être à la fois simple et représentatif du comportement du matériau observé lors des essais décrits précédemment. De l'analyse de ces derniers, on choisit les caractéristiques suivantes pour le modèle :

- le comportement est élastoviscoplastique ;
- l'écrouissage est cinématique linéaire (pour des raisons de simplicité) ;
- les coefficients intrinsèques au matériau correspondant au modèle dépendent de la température ;
- les contraintes et la vitesse de déformation sont reliées par une relation non-linéaire.

Nous choisissons le modèle élastoviscoplastique proposé par Lemaitre et Chaboche [57] avec une loi de type Norton Hoff pour décrire le comportement du matériau. Ce modèle présente un degré de précision suffisant et cohérent avec les autres étapes de l'approche globale de dimensionnement adoptée.

On se place dans le cadre des matériaux standards généralisés [70]. La déformation totale est séparée en une partie purement élastique et une partie viscoplastique, de sorte que :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp}$$

Les variables d'état et les variables associées, ainsi que les variables flux et les variables duales associées, sont données dans le tableau suivant.

variable d'état	variable associée	variable flux	variable associée
$\epsilon^e$	$\sigma$	$\dot{\epsilon}^{vp}$	$\sigma$
$T$	$s$	$\mathbf{q}$	$-\nabla T/T$
$\alpha$	$\mathbf{X}$	$\dot{\alpha}$	$\mathbf{X}$

Si on note  $\psi^*$  et  $\phi^*$  les formes duales du potentiel d'énergie libre spécifique et du potentiel de dissipation, les lois d'état s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon^e = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma} \\ T = -\rho \frac{\partial \psi^*}{\partial s} \\ \alpha = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{X}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}^{vp} = \rho \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma} \\ \mathbf{q} = \rho \frac{\partial \phi^*}{\partial (\nabla T/T)} \\ \dot{\alpha} = -\rho \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{X}} \end{array} \right.$$

Les potentiels s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi^*(\sigma, s, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2\rho} \left[ \frac{1+\nu}{E} \text{tr}(\sigma \cdot \sigma) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma)^2 \right] + \frac{3}{4H} \mathbf{X} : \mathbf{X} \\ \phi^*(\sigma, -\frac{\nabla T}{T}, \mathbf{X}) &= \frac{\eta}{m+1} < \frac{J_2(\sigma - \mathbf{X}) - \sigma_y}{\eta} >^{m+1} \end{aligned}$$

Ces expressions permettent d'établir les équations d'état du modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \mathbf{I} \\ \alpha = \frac{3}{2H} \mathbf{X} \\ \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{3}{2} < \frac{J_2(\sigma - \mathbf{X}) - \sigma_y}{\eta} >^m \frac{\mathbf{s} - \mathbf{X}}{J_2(\mathbf{s} - \mathbf{X})} \\ \dot{\alpha} = \dot{\epsilon}^{vp} \end{array} \right.$$

Ce modèle élastoviscoplastique dit *unifié* correspond au schéma rhéologique de la figure (3.10).

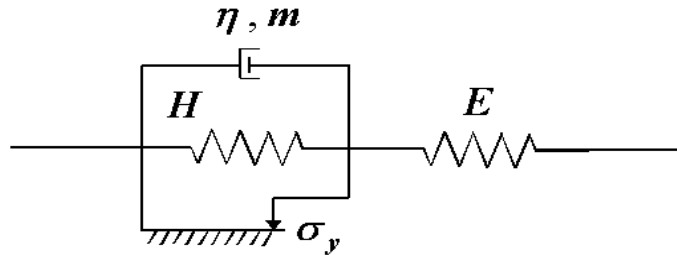


FIG. 3.10: Modèle élastoviscoplastique unifié de type Norton-Hoff

Les essais TRR présentés précédemment sont exploités afin de réaliser l'identification des paramètres de la fonte GLJ2 associés au modèle unifié. Ces paramètres correspondent à  $E, \sigma_y, H, m$  et  $\eta$ . Ils ont été identifiés pour chaque valeur de température. En revanche, on considère qu'ils ne dépendent pas de la vitesse de déformation. L'identification est réalisée sur un cycle stabilisé ; les coefficients correspondent donc au comportement stabilisé de la fonte.

*Remarque 1 : Ce modèle rhéologique ne prend pas en compte la différence de comportement de la fonte lorsqu'elle est sollicitée en traction ou en compression. Certaines études [46] montrent pourtant que la fonte, et plus particulièrement la fonte à graphite lamellaire, a des modules de Young et surtout des limites d'élasticité différents en traction et en compression. Les essais TRR ont malheureusement été effectués avec un rapport de charge  $R = \epsilon_{\min}/\epsilon_{\max} = 0$  ; ils ne permettent donc pas de mettre en évidence cette différence traction/compression. D'éventuelles modifications de modélisation pourront être faites si les futures caractérisations le justifient, mais la démarche reste la même.*

*Remarque 2 : Avec ce choix de modèle, les mécanisme de déformation et d'endommagement sont découplés. Sans ce découplage, il faudrait simuler toute la vie de la pièce. Il faudra donc disposer d'une loi d'endommagement en fatigue associée à un critère de ruine.*

### 3.1.4 Modélisation de l'endommagement

#### 3.1.4.1 Contexte

D'après la classification des freinages "*normaux*" proposée dans la partie (3.1.2), les disques peuvent subir de la fatigue oligocyclique (à faible nombre de cycles) et/ou de la fatigue polycyclique (à grand nombre de cycles). Il faut donc disposer, pour chacune des deux familles de comportement, de la définition d'une variable (ou de plusieurs) qui quantifie l'endommagement, d'un critère de fatigue et des caractéristiques du matériau correspondant au critère en question.

Ces critères doivent tenir compte du contexte anisotherme et multiaxial du problème. En effet, comme l'analyse des phénomènes physiques l'a montré, le disque de frein subit des cycles thermomécaniques complexes : la température évolue de façon transitoire et les champs mécaniques engendrés dans le disque sont tridimensionnels. Cette multiaxialité est due aux effets de structure et aux gradients thermomécaniques présents dans le disque.

Enfin, les lois d'endommagement doivent être relativement simples, avec peu de variables d'endommagement. Les paramètres du matériau liés au critère de fatigue doivent aussi être facilement identifiables par des essais simples.

#### 3.1.4.2 Fatigue oligocyclique

Les premières études de structures métalliques subissant de la fatigue oligocyclique à hautes températures ont été entamées dans les années cinquante dans l'industrie aéronautique. Le contexte était celui de problèmes uniaxiaux et isothermes. Ces études ont abouti à la proposition de lois relativement complexes avec beaucoup de paramètres.

Viennent ensuite les travaux de Manson et Coffin (dans les industries aéronautique et nucléaire). Les problèmes traités sont toujours uniaxiaux et isothermes mais les lois proposées sont plus simples. Leurs études ont montré que la fatigue plastique oligocyclique (c'est-à-dire celle qui est générée par des cycles purement mécaniques) est due à un cumul de déformations plastiques. Ainsi, les lois proposées par Manson [63] et Coffin [19] sont de la forme :

$$\Delta\epsilon^p \cdot N_R^{\beta_1} = c_1$$

où  $\Delta\epsilon^p$  est l'amplitude de déformation plastique,  $N_R$  le nombre de cycles à rupture et  $\beta_1$  et  $c_1$  sont des paramètres intrinsèques au matériau. Ces derniers peuvent dépendre de la température.

Pour prendre en compte l'influence de la fréquence des cycles, qui a été mise en évidence par de nombreux essais, Coffin [20] a proposé une autre loi de fatigue oligocyclique :

$$\Delta\epsilon^p \cdot (N_R \nu^{k-1})^{\beta_2} = c_2$$

où  $\nu$  est la fréquence et  $\beta_2$  et  $c_2$  sont des paramètres matériau.

La méthode SRP (Strain Range Partitioning) proposée par Manson et Halford [41] a été développée pour les problèmes anisothermes. Cependant, cette loi de fatigue reste uniaxiale et ses restrictions ont été mises en évidence par Chaboche et al. [14].

Dans le problème du disque de frein, la température balaie une gamme relativement large : lors d'un freinage, elle peut varier de  $20^\circ C$  à plus de  $700^\circ C$ . On ne peut plus considérer que le contexte est isotherme. Or la notion d'amplitude de déformations plastiques utilisée dans les critères cités précédemment n'est pas simplement généralisable aux cas où la limite d'élasticité varie avec la température. Une autre difficulté vient du fait que les champs thermomécaniques induits dans le disque par les cycles de sollicitations sont multiaxiaux. Ces critères ne peuvent donc pas s'appliquer au problème du frein. Il faut donc disposer d'un critère qui soit à la fois anisotherme et multiaxial. On désire également prendre en compte les trois paramètres les plus influents sur le comportement en fatigue, qui sont [16] :

- la température ;
- la vitesse de déformation ;
- la contrainte moyenne ou la déformation moyenne des cycles.

On note toutefois que, d'après Chaboche et al. [15], l'influence des contraintes moyennes est bien plus importante que celle des déformations moyennes.

Le critère de fatigue oligocyclique qui semble le mieux adapté au problème du disque de frein est celui proposé par Charkaluk [16][17][18][82]. Il repose sur la notion d'énergie mécanique dissipée par cycle. Celle-ci permet de :

- s'affranchir de la définition d'une amplitude de déformation plastique en régime anisotherme ;
- tenir compte des cycles de contraintes ;
- considérer des chargements multiaxiaux ;
- prendre en compte les variations de vitesse de déformations.

Le lien entre l'énergie mécanique dissipée et l'endommagement peut s'élaborer de la façon suivante : des essais en thermographie infra-rouge effectués par Luong et Dang Van [58] ont montré que, pour une éprouvette sollicitée cycliquement avec une amplitude de chargement croissante, la limite d'endurance correspond à une discontinuité de la courbe de l'élévation de la température en fonction du nombre de cycles. Ils ont donc conclu que la limite d'endurance correspond à un changement de nature de dissipation d'énergie.

L'initiation de fissure serait donc liée au cumul d'une énergie emmagasinée dans la structure, qui atteint une certaine valeur critique.

Dans un problème uniaxial, la densité d'énergie mécanique dissipée par cycle s'écrit :

$$\Delta W = \int_{cycle} \sigma \cdot \dot{\epsilon}^p dt$$

Puisque le terme relié aux déformations élastiques s'annule sur un cycle fermé, cette densité d'énergie s'écrit aussi :

$$\Delta W = \int_{cycle} \sigma \cdot \dot{\epsilon} dt$$

Cette expression est facilement généralisable aux cas tridimensionnels :

$$\Delta W = \int_{cycle} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dt = \int_{cycle} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dt$$

Cette densité d'énergie est exprimée en  $J/mm^3$ . On remarque que cette grandeur permet de prendre en compte les effets de la vitesse de déformation et de la température par le biais des contraintes. En revanche, la valeur des contraintes moyennes n'est pas prise en compte.

Le critère de fatigue oligocyclique s'écrit alors de la façon suivante :

$$\Delta w_{sat} * N_r^\gamma = c$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{ll} \Delta w_{sat} & \text{est la densité d'énergie mécanique dissipée sur un cycle représentatif} \\ & \text{du comportement cyclique de la structure étudiée;} \\ N_r & \text{est le nombre de cycles à rupture;} \\ \gamma \text{ et } c & \text{sont des constantes du matériau.} \end{array} \right.$$

Les essais de fatigue montrent que les courbes d'évolution du comportement cyclique du matériau ont la forme des courbes présentées dans le schéma (3.11). Le matériau subit d'abord un durcissement ou un adoucissement rapides, puis l'évolution devient lente. Les travaux de Charkaluk montrent que l'énergie calculée pour le cycle correspondant au nombre  $N_{sat}$  donne une évaluation suffisamment précise du comportement cyclique du matériau. Le nombre de cycles à rupture est défini de la façon suivante (*figure 3.12*) : on trace une droite parallèle à celle qui est tangente à la partie de la courbe dite stabilisée, à 10% en dessous de cette dernière. Le point d'intersection entre cette seconde droite et la courbe de contrainte définit le point de rupture. Cette définition est bien sûr conventionnelle. Elle représente néanmoins bien le changement de régime de fonctionnement de la structure.

Des essais de fatigue effectués sur de la fonte GLJ2 ont permis de déterminer les coefficients  $\gamma$  et  $c$  relatifs au matériau. Ces essais consistent en des cycles de traction/compression répétés jusqu'à la rupture des éprouvettes. Les tests ont été menés à



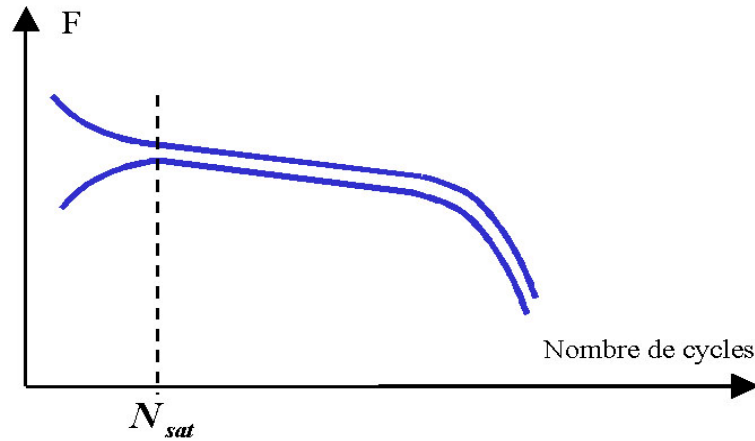


FIG. 3.11: Evolution du comportement cyclique du matériau

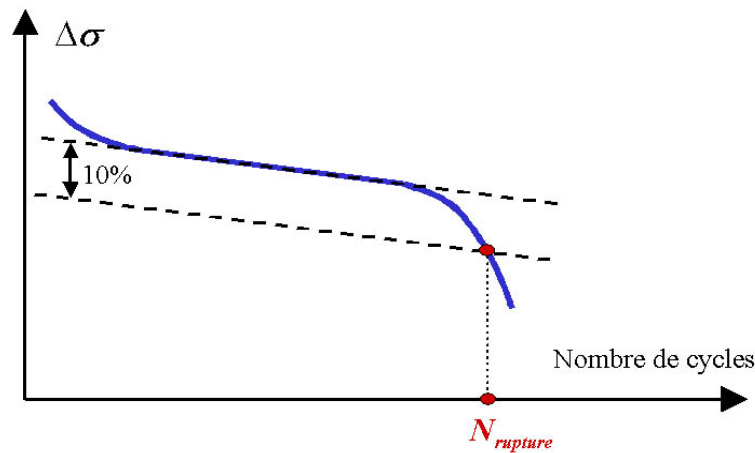


FIG. 3.12: Définition du nombre de cycles à rupture

température constante ( $20^{\circ}\text{C}$ ,  $300^{\circ}\text{C}$ ,  $400^{\circ}\text{C}$ ,  $500^{\circ}\text{C}$  et  $700^{\circ}\text{C}$ ). Pour chaque température, trois différents niveaux de déformation ont été imposés, afin de viser trois nombres de cycles à rupture différents ( $N_r \simeq 500$ ,  $N_r \simeq 5\,000$  et  $N_r \simeq 15\,000$ ).

### 3.1.4.3 Fatigue polycyclique

#### 3.1.4.4 Contexte et historique

C'est sous l'impulsion des industries mécaniques que les premiers travaux en fatigue à grand nombre de cycles ont démarré. En effet, la fatigue des structures est le mode principal de rupture des pièces métalliques qui sont soumises à des chargements répétés.

A la suite d'un accident ferroviaire (accident de Versailles en 1842), Wöhler a abordé le phénomène en 1860, en analysant le comportement d'éprouvettes sollicitées en flexion alternée. Après une série d'essais, il a pu établir ce qu'on appelle les courbes S-N ou encore

les courbes de Wöhler (*figure 3.13*). Sur ces courbes, l'amplitude des cycles de contraintes ( $\sigma_a$ ) est représentée en fonction du nombre de cycles avant rupture ( $N$ ). Cette amplitude tend vers une valeur asymptotique lorsque le nombre de cycles devient très élevé (au delà de  $10^7$ ). Cette limite ( $\sigma_e$ ) est appelée limite d'endurance du matériau.

Gerber (1874) ainsi que Goodman et Haigh (1899) ont ensuite étudié l'influence de la valeur moyenne des contraintes sur le comportement en fatigue des matériaux. La figure (3.14) montre que lorsque cette dernière augmente (c'est-à-dire lorsque le rapport de charge  $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$  augmente), la valeur de l'amplitude de contrainte associée à un nombre de cycles donné diminue. Les diagrammes présentés dans la figure (3.15) résument les résultats expérimentaux de différentes études ( $\sigma_e$  désigne la limite d'endurance pour un chargement alterné,  $\sigma_o$  la limite d'élasticité en traction et  $\sigma_u$  la limite de rupture). On a vu alors apparaître diverses lois empiriques, comme celles de Basquin (1910), de Gough et Pollard (1926) ou encore de Nashihara-Kawamoto (1941).

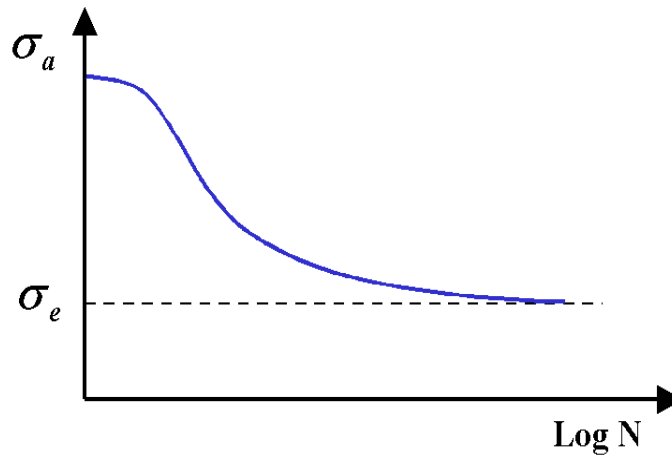


FIG. 3.13: Courbe de Wöhler

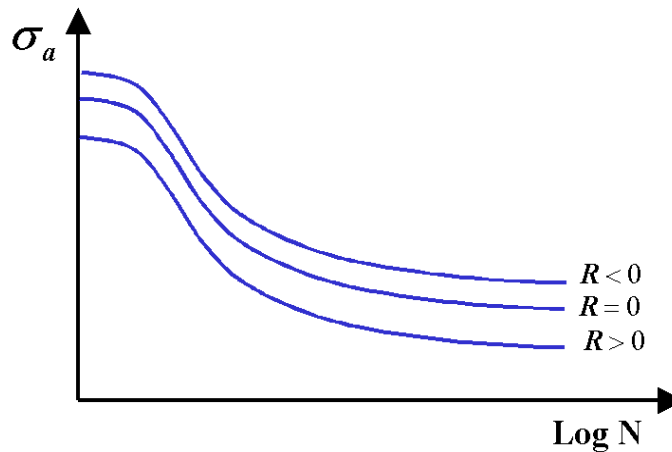


FIG. 3.14: Influence de la contrainte moyenne sur les courbes de Wöhler

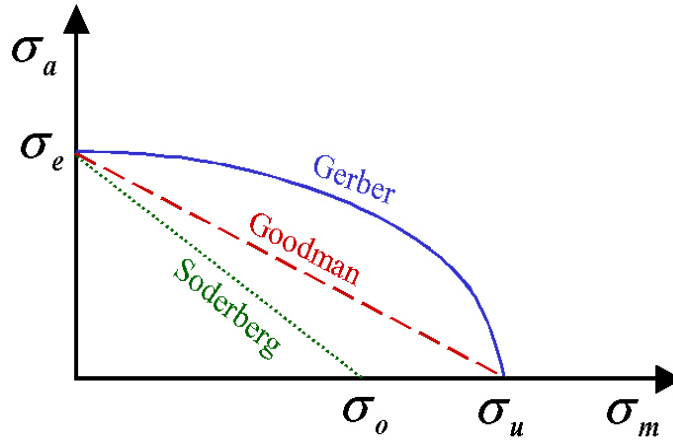


FIG. 3.15: Influence de la contrainte moyenne sur la limite d'endurance

De nombreux accidents ont toutefois montré la très grande insuffisance de ces lois empiriques. On peut par exemple citer les défaillances de deux COMET dues à des fissures de fatigue amorcées dans leur fuselage en 1950. Un Boeing 747 de la Japan Airlines s'est écrasé en 1985 à la suite d'apparition de fissures au niveau des rivets de la coque arrière du fuselage. Un autre accident d'un Boeing a eu lieu à Amsterdam en 1993, suite à des problèmes de fatigue. Il est donc vite apparu nécessaire de disposer de critères de fatigue qui puissent prédire ces phénomènes catastrophiques. Ceux-ci surviennent dans des structures complexes et multidimensionnelles. Les lois doivent donc prendre en compte ce contexte multidirectionnel.

Nous commencerons par rappeler brièvement les principaux critères de fatigue polycyclique. Ils suivent une approche dite macroscopique. L'approche mésoscopique de Dang Van, qui est celle qui semble la mieux adaptée aux problèmes de la mécanique automobile, est ensuite détaillée. Enfin, nous proposerons une extension anisotherme du critère de Dang Van (et de la version proposée par Papadopoulos).

#### 3.1.4.5 Critères de fatigue polycycliques basés sur une approche macroscopique

Les observations expérimentales ont montré l'influence de l'amplitude des contraintes et de leur valeur moyenne sur le comportement en fatigue des matériaux. Deux autres paramètres se sont également révélés importants : la contrainte de cisaillement et la contrainte normale. Deux types de critère sont apparus. Les premiers sont dits de type *plan critique*. Ils se présentent sous la forme d'une fonction des quantités citées ci-dessus, évaluées pour un plan de cisaillement supposé critique. Leur démarche est la suivante :

- on choisit un plan critique ;
- on calcule les grandeurs influantes :

- $\tau_a$  l'amplitude de cisaillement
- $\tau_m$  la valeur moyenne du cisaillement
- $\mathcal{N}_a$  l'amplitude des contraintes normales
- $\mathcal{N}_m$  la valeur moyenne des contraintes normales.

- on propose un critère de la forme  $f(\tau_a, \tau_m, \mathcal{N}_a, \mathcal{N}_m) < 0$ .

Parmi les critères de type *plan critique*, on cite les plus répandus :

### Critère de Findley

- Le plan critique  $\mathbf{n}^*(\phi^*, \theta^*)$  est déterminé par :

$$\max_{\phi, \theta} \{ \tau_a(\phi, \theta) + a \mathcal{N}_{max}(\phi, \theta) \}$$

- Le critère s'écrit :

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) + a \mathcal{N}_{max}(\phi^*, \theta^*) \leq b$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres du matériau.

### Critère de Mataké

- Le plan critique  $\mathbf{n}^*(\phi^*, \theta^*)$  est déterminé par :

$$\max_{\phi, \theta} \{ \tau_a(\phi, \theta) \}$$

- Le critère s'écrit :

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) + a \mathcal{N}_{max}(\phi^*, \theta^*) \leq b$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres du matériau.

D'autres critères existent, comme ceux de Stulen-Cummings, de Mc Diarmid ou de Socie.

Les autres critères reposent sur des invariants de contraintes. Les plus connus des critères sont ceux de Sines et de Crossland.

### Critère de Sines

$$\sqrt{J_{2,a}} + a \mathcal{P}_m \leq b$$

$$\begin{cases} J_{2,a} \text{ est l'amplitude de l'invariant } J_2 ; \\ \mathcal{P}_m \text{ est la valeur moyenne de la pression hydrostatique ;} \\ a \text{ et } b \text{ sont des caractéristiques du matériau.} \end{cases}$$

Si  $f_o$  est la limite d'endurance du matériau en flexion répétée et  $t$  la limite en torsion alternée, les expressions de  $a$  et  $b$  sont :  $b = t$  ;  $a = \frac{t - f_o/\sqrt{3}}{f_o/\sqrt{3}}$

### Critère de Crossland

$$\sqrt{J_{2,a}} + a \mathcal{P}_{max} \leq b$$

$$\begin{cases} J_{2,a} \text{ est l'amplitude de l'invariant } J_2 ; \\ \mathcal{P}_{max} \text{ est la valeur maximale sur le cycle de la pression hydrostatique ;} \\ a \text{ et } b \text{ sont des caractéristiques du matériau.} \end{cases}$$

Si  $f$  est la limite d'endurance du matériau en flexion alternée et  $t$  la limite en torsion alternée, les expressions de  $a$  et  $b$  sont :  $b = t$  ;  $a = \frac{t - f/\sqrt{3}}{f/3}$

D'autres critères existent, comme ceux de Deperrois, de Marin, de Kakuno et Kawada ou encore de De Freitas.

#### 3.1.4.6 Approche mésoscopique de Dang Van

La fatigue à grand nombre de cycles est un phénomène qui apparaît alors même que le matériau a un comportement macroscopique élastique. En fait, bien qu'aucune dégradation ne soit détectée à l'échelle macroscopique, les observations à l'échelle mésoscopique montrent que la fatigue est un phénomène débutant au niveau des grains, par des modifications structurales et des apparitions de bandes de glissement localisées dans les grains les plus défavorablement orientés. La particularité des critères de non-amorçage proposés par Dang Van et al. [27][28][30] est de porter sur les grandeurs évaluées à l'échelle mésoscopique. Les principales étapes de leur élaboration sont :

- détermination des contraintes macroscopiques élastiques ou adaptées (hypothèse d'adaptation macroscopique) ;
- passage macro-méso permettant de déterminer les contraintes mésoscopiques à partir des contraintes macroscopiques ;
- postulat d'un critère local de fatigue portant sur les contraintes mésoscopiques à l'état adapté, et reformulation en fonction des contraintes macroscopiques.

### (i) Passage macro-méso

La relation qui lie les quantités mécaniques macroscopiques et mésoscopiques est difficile à établir car il faudrait connaître précisément les propriétés morphologiques et mécaniques du matériau à l'échelle mésoscopique. En s'appuyant sur des hypothèses simplificatrices, différentes relations ont été proposées par Sach, Taylor ou Kröner. Nous choisissons d'adopter le modèle de Lin-Taylor dont les hypothèses sont les suivantes :

- le grain est considéré comme une inclusion dans une matrice élastique infinie ;
- la matrice impose sa déformation au grain ;
- le grain et la matrice sont isotropes et possèdent les mêmes caractéristiques élastiques.

La relation de passage des contraintes macroscopiques  $\Sigma(M, t)$  au point M (qui est un Volume Élémentaire Représentatif) aux contraintes mésoscopiques  $\sigma(M, t, m)$  au point m appartenant au V.E.R. s'écrit sous la forme :

$$\sigma(M, m, t) = \Sigma(M, t) + \rho(M, m, t).$$

$\rho$ , le champ de contraintes résiduelles mésoscopiques, est relié au champ de déformations plastiques mésoscopiques par :  $\rho = -2\mu\epsilon^p$

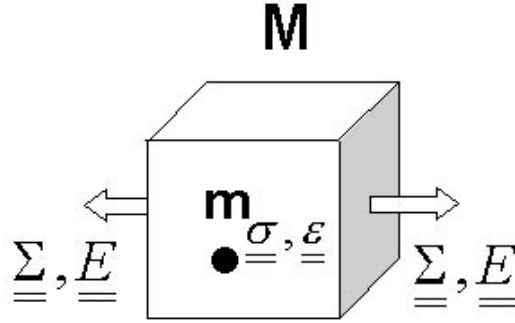


FIG. 3.16: Passage de l'échelle macroscopique à l'échelle mésoscopique

### (ii) Adaptation

On dit qu'une structure soumise à un chargement variable dans le temps s'adapte lorsque sa réponse asymptotique est élastique. Autrement dit, il y a adaptation si *en tout point la déformation permanente et l'écrouissage tendent vers des valeurs fixes et l'énergie dissipée reste bornée quand le temps  $t$  tend vers l'infini.*

Le premier théorème d'adaptation statique donnant une condition suffisante d'adaptation a été établi par Melan et précisé par Koiter [52] dans le cas des matériaux parfaitement plastiques. Il a ensuite été généralisé par plusieurs auteurs au cas des matériaux écrouissables. Il repose sur la détermination de la solution purement élastique  $\sigma^{EL}(M, t)$

et sur la recherche d'un champ de contrainte auto-équilibré  $\boldsymbol{\rho}(M)$  ainsi que de variables d'écroutissage cinématique  $\boldsymbol{\alpha}(M)$  et isotrope  $\kappa(M)$  indépendants du temps qui vérifient :

$$\exists T, \forall M, \forall t > T, f(\boldsymbol{\sigma}^{EL}(M, t) - \boldsymbol{\rho}(M), \boldsymbol{\alpha}(M), \kappa(M)) < 0 \quad (3.1)$$

où  $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \kappa) \leq 0$  définit le domaine d'élasticité du matériau.

Ces conditions imposent au champ  $\boldsymbol{\rho}$  de respecter l'équilibre global avec des sollicitations nulles, ce qui rend sa recherche assez difficile. Une condition locale, donc de vérification plus facile, a été proposée par Mandel et al [62]. Elle s'applique dans le cas où les coefficients élastiques sont constants et l'espace des contraintes est de dimension finie. Elle s'énonce comme suit :

*s'il existe un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^*(M)$  indépendant du temps  $t$ , tel que :*

$$\exists T, \forall M \text{ et } \forall t > T, g(\boldsymbol{\sigma}^{EL}(M, t) - \boldsymbol{\sigma}^*(M)) < k(\kappa_s) \quad (3.2)$$

*où la fonction de charge est définie par  $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \kappa) = g(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - k(\kappa)$   
et  $\kappa_s$  est la plus grande valeur de  $\kappa$  compatible avec l'hypothèse des petites déformations ;*

*si ce champ est proche d'un champ auto-équilibré  $\boldsymbol{\rho}^s$  et si  $\mathbf{M} : (\boldsymbol{\rho}^s - \boldsymbol{\rho}_0)$  est petit ( $\mathbf{M}$  matrice des complaisances élastiques,  $\boldsymbol{\rho}_0$  champ des contraintes résiduelles initiales)*

*alors il y a adaptation par petites déformations.*

L'inéquation (3.2) est équivalente à la condition

$$\inf_{\boldsymbol{\sigma}_1} \sup_t \{ \sqrt{g[\boldsymbol{\sigma}^{EL}(M, t) - \boldsymbol{\sigma}_1]} \} < k(\kappa_s) \quad (3.3)$$

Pour un matériau de type Mises dont la fonction de charge est :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, C\boldsymbol{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{1}{2}[\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) - C\boldsymbol{\epsilon}^p] : [\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) - C\boldsymbol{\epsilon}^p] - k(\kappa)}$$

La condition d'adaptation (3.3) s'écrit :

$$k^* = \inf_{\boldsymbol{\sigma}_1} \sup_t \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \| \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{EL}(M, t)) - \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_1) \| \right\} < k(\kappa_s) \quad (3.4)$$

Autrement dit, il y a adaptation si le rayon  $\sqrt{2}k^*$  de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du déviateur des contraintes élastiques est inférieur à  $\sqrt{2}k(\kappa_s)$ . On obtient ainsi une condition locale d'adaptation particulièrement facile à mettre en œuvre numériquement.

### (iii) Critères de fatigue et reformulation

Le critère de fatigue porte sur les contraintes mésoscopiques évaluées lorsque l'adaptation est atteinte. Elles peuvent être déterminées grâce aux relations de Lin-Taylor ainsi qu'à la condition d'adaptation locale :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\Sigma}(t) + \boldsymbol{\rho} \\ p(t) = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\Sigma}(t)) = \mathcal{P}(t) \end{cases}$$

$\boldsymbol{\rho}$  désigne le champ de contraintes résiduelles mésoscopiques à l'état adapté ; il est alors indépendant du temps. En supposant que la limite de fatigue correspond à la limite d'adaptation, on choisit le champ  $\boldsymbol{\rho}$  comme le centre de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du déviateur des contraintes macroscopiques.

La condition d'endurance illimitée en un point  $m$  est alors écrite sur le cycle stabilisé de contrainte de période  $T$ , sous la forme :

$$h(\boldsymbol{\sigma}(m, t), t \in [0, T]) < 0$$

Les observations expérimentales montrent le rôle prépondérant du cisaillement et l'influence (bénéfique en compression, néfaste en traction) de la pression hydrostatique sur le comportement en fatigue. La fonction  $h$  doit en rendre compte.

Dans l'une des premières formulations du critère de Dang Van, la fonction  $h$  proposée est :

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = \max_{\mathbf{n}} \max_t \{ \tau(\mathbf{n}, t) + a_d \mathcal{P}(t) - b_d \} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale à la facette considérée et  $a_d$  et  $b_d$  sont des constantes caractéristiques du matériau.

On peut s'affranchir de la maximisation sur  $\mathbf{n}$ , en considérant la cission mésoscopique maximale donnée par la plus grande des demi-différences des valeurs principales du déviateur des contraintes. Le critère précédent (3.5) s'écrit alors :

$$\max_t \{ \tau(t) + a_d \mathcal{P}(t) - b_d \} < 0 \quad (3.6)$$

Une version modifiée du critère de Dang Van est :

$$\max_t \{ \tau(t) \} + a_d \mathcal{P}_{max} - b_d < 0 \quad (3.7)$$

On propose une écriture en fonction des contraintes macroscopiques de cette dernière formulation du critère de Dang Van :

**Proposition 1** *Le critère modifié de Dang Van (3.7) exprimé en fonction des contraintes macroscopiques est :*

$$\min_{\boldsymbol{\Sigma}^T} \{ \max_t \| \tau[\boldsymbol{\Sigma}(t) - \boldsymbol{\Sigma}^T] \| \} - b_d + a_d \mathcal{P}_{max} < 0 \quad (3.8)$$

où  $\tau[\boldsymbol{\Sigma}]$  est la cission maximale induite par  $\boldsymbol{\Sigma}$ .



Le critère de Papadopoulos [73] repose également sur une approche mésoscopique de la fatigue. Il est exprimé en fonction des contraintes macroscopiques sous la forme :

$$\min_{\mathbf{S}^T} \max_t \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \| \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^T \| \} - b_p + a_p P_{max} < 0 \quad (3.9)$$

où  $a_p$  et  $b_p$  sont des constantes caractéristiques du matériau, et  $\mathbf{S}$  est le déviateur de  $\Sigma$ . Ce critère correspond à la fonction  $h$  suivante :

$$h(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_t \{ \| \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \| \} - b_p + a_p P_{max} \quad (3.10)$$

### 3.1.4.7 Proposition d'une extension anisotherme du critère de Dang Van

L'approche macro-méso développée par Dang Van en fatigue polycyclique des métaux a conduit à la formulation de critères largement utilisés dans l'industrie mécanique pour la prédiction sur structure de l'amorçage de fissure de fatigue dans les cas isothermes. En réalité, ces critères peuvent aussi s'appliquer dans les problèmes de pièces soumises à des chargements thermiques lorsque les variations de température influent peu sur les caractéristiques du comportement en fatigue des matériaux constitutifs. Cependant pour des structures métalliques comme les moteurs, les réacteurs ou les freins, les chargements, tant mécaniques que thermiques, produisent des écarts de température assez importants pour que le comportement en fatigue du matériau en soit affecté. Cette influence doit être prise en compte pour toute prédiction fiable de la tenue de ces structures. En utilisant l'approche multi-échelle présentée précédemment, nous proposons une extension anisotherme des critères de fatigue polycyclique. Fondée sur la démarche classique de Dang Van, elle utilise un théorème local d'adaptation anisotherme établi par Mandel et al. [62], pour aboutir naturellement à une généralisation des critères classiques isothermes. Des exemples simples ont été traités mais ils ne sont pas décrits ici. On peut trouver leurs descriptions dans les articles [61, 67] ou dans les annexes D.

Des essais de fatigue sur éprouvettes en fonte GLJ2 ont été réalisés afin de vérifier l'influence de la température sur les limites d'endurance du matériau. Ces tests ont été effectués au laboratoire LMPM de l'ENSMA de Poitiers. Différentes températures ont été imposées :  $T \in \{20^\circ C; 300^\circ C; 400^\circ C; 600^\circ C\}$ . Deux rapports de charge ont été étudiés :  $R \in \{0, 1; -1\}$ . Pour chaque couple  $(T, R)$ , on a imposé 5 niveaux de contraintes différents pour l'établissement de la courbe de Wöhler. Chaque niveau de contraintes a été testé 5 fois, afin d'estimer la dispersion des résultats. La butée des essais était fixée à  $2.10^7$  cycles. L'analyse de tous les essais (*figure 3.17*) montre que les limites d'endurance restent d'abord constantes lorsque la température est en dessous de  $400^\circ C$ . Elles chutent aux alentours de  $500^\circ C$ . Sachant qu'un disque de frein voit sa température s'élever jusqu'à plus de  $700^\circ C$ , une extension du critère du Dang Van semble tout à fait nécessaire.

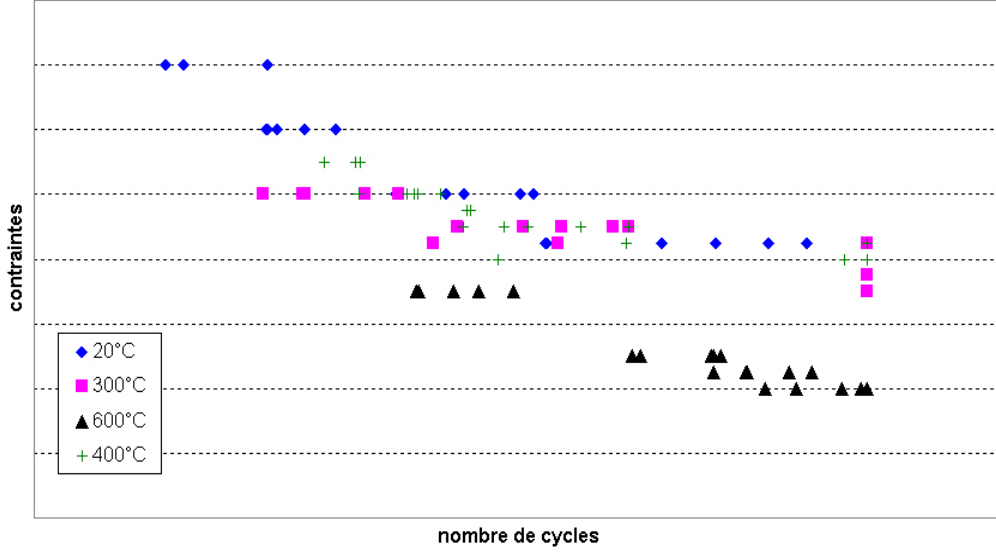


FIG. 3.17: Courbes de Wöhler de la fonte GLJ2 en fonction de la température, pour  $R = -1$

On se place donc dans le cas d'un chargement variable anisotherme. On suppose que seuls la limite d'élasticité et les limites d'endurance du matériau dépendent de la température (les modules d'élasticité du matériau sont, quant à eux, supposés constants). La condition locale d'adaptation pour un matériau de type von Mises à écrouissage cinématique linéaire et isotrope devient [62] :

$$\inf_{\text{dev}(\sigma_1)} \sup_t \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \|\text{dev}(\sigma^{EL}(M, t)) - \text{dev}(\sigma_1)\| - k_s^*(T(M, t)) \right\} < 0 \quad (3.11)$$

Il apparaît que le critère écrit sous la forme (3.6) n'est plus compatible avec l'écriture anisotherme de la condition d'adaptation (3.11). La limite  $k_s^*(T(M, t))$  dépend maintenant de la température  $T$  et donc du temps  $t$ . De plus le cisaillement  $\tau(t)$  apparaissant dans le critère (3.6) est calculé à partir d'un centre  $\rho^*$  qui n'a plus de sens en anisotherme. En revanche, en partant des expressions des critères isothermes écrites en fonction des grandeurs macroscopiques (3.8, 3.9), des extensions cohérentes de ces critères en fatigue polycyclique anisotherme peuvent être proposées.

On rappelle que dans le cas d'un chargement isotherme, la version modifiée du critère de Dang Van est :

$$\min_{\mathcal{S}^T} \left\{ \max_t \|\tau[\mathcal{S}(t) - \mathcal{S}^T]\| \right\} - b_d + a_d \mathcal{P}_{max} < 0$$

**Proposition 2** Dans le cas d'un chargement anisotherme, une extension naturelle du critère de fatigue de Dang Van est :

$$\min_{\mathbf{S}^T} \left\{ \max_t \left[ \frac{\|\tau[\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^T]\|}{\beta_d(T(t))} - 1 \right] \right\} + \max_t \{ \alpha_d(T(t))P(t) \} < 0 \quad (3.12)$$

où  $\alpha_d(T)$  et  $\beta_d(T)$  sont des fonctions caractéristiques du matériau.

La détermination des fonctions  $\alpha_d(T)$  et  $\beta_d(T)$  peut se faire à partir des limites d'endurance en flexion alternée  $f(T)$  et en torsion alternée  $w(T)$  évaluées sur des essais effectués à différentes températures  $T$  constantes. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \beta_d(T) &= w(T) \\ \alpha_d(T) &= (w(T) - \frac{f(T)}{2}) / (w(T) \frac{f(T)}{3}) \end{aligned}$$

**Proposition 3** Dans le cas d'un chargement anisotherme, une extension naturelle du critère de fatigue de Papadopoulos est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \min_{\mathbf{S}^T} \left\{ \max_t \left[ \frac{\|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^T\|}{\beta_p(T(t))} - 1 \right] \right\} + \max_t \{ \alpha_p(T(t))P(t) \} < 0 \quad (3.13)$$

où  $\alpha_p(T)$  et  $\beta_p(T)$  sont des fonctions caractéristiques du matériau.

Comme pour le critère précédent, les fonctions  $\alpha_p(T)$  et  $\beta_p(T)$  s'expriment en fonction de  $f(T)$  et  $w(T)$  :

$$\begin{aligned} \beta_p(T) &= w(T) \\ \alpha_p(T) &= (w(T) - \frac{f(T)}{\sqrt{3}}) / (w(T) \frac{f(T)}{3}) \end{aligned}$$

## 3.2 Application numérique

### 3.2.1 Introduction

Il s'agit à présent de vérifier l'applicabilité des méthodes numériques développées (algorithme T.R.C., algorithme stationnaire, calcul des variables d'endommagement pour la fatigue oligocyclique et la fatigue polycyclique) au problème du disque de frein automobile. Les méthodes doivent permettre de prédire les réponses thermomécaniques d'un disque soumis à un freinage donné avec des temps de calcul compatibles avec les exigences des bureaux d'étude. Ainsi, le but de cette partie est d'évaluer les grandeurs thermomécaniques d'un disque de frein (température, contraintes, déformations, déformations permanentes, variables d'endommagement) et leurs variations au cours d'un freinage et de les confronter à des mesures sur structure. On présentera donc des calculs de disque avec des données relatives à des essais qui ont été réalisés sur un banc dynamométrique. Les conditions de simulation expérimentale ne sont pas forcément celles d'un disque sur véhicule réel mais les mesures sont plus faciles à réaliser sur un tel dispositif et les conditions aux limites sont plus aisément contrôlées. De même, les cycles imposés au disque ne sont pas forcément représentatifs d'une vie de disque de frein mais l'objectif est simplement de montrer que les méthodes numériques utilisées permettent une prédiction des phénomènes.

### 3.2.2 Description du problème

#### 3.2.2.1 Description du disque

L'étude porte sur un disque de frein plein en fonte grise GL (à graphite lamellaire). Il s'agit du disque M49 (266\*13 n°9617725180) qui équipe certaines versions du véhicule *Citroën Berlingo* (fig. 3.18). Le disque est constitué d'un anneau plein avec deux pistes de frottement, d'un bol qui est fixé sur le moyeu et sur lequel est fixée la jante et d'un raccordement entre les pistes et le bol. Ce raccordement est nécessaire car l'anneau et la partie du bol qui est fixée au moyeu ne sont pas sur un même plan pour des questions d'encombrement et de logement des plaquettes et de l'étrier. La jonction entre le bol et les pistes est souvent usinée en forme de gorge pour limiter le flux de chaleur issu des pistes vers le bol afin d'éviter un échauffement excessif de la jante et du pneumatique. Les pistes de frottement sont dites extérieures quand elles se situent du côté de la jante et intérieures quand elles se situent du côté de l'essieu (fig. 3.18).

Le rayon extérieur du disque est  $R_e = 133 \text{ mm}$  et le rayon intérieur des pistes de frottement est  $R_i = 86,5 \text{ mm}$ . L'épaisseur des pistes est  $e = 13 \text{ mm}$ .

Le disque est modélisé par un maillage tridimensionnel, composé de 9 440 hexaèdres et de 11 520 noeuds. Ce maillage a été obtenu par révolution d'une section 2D dont la discrétisation est représentée dans la figure (3.19). Elle est constituée de 236 quadrilatères. On note que le maillage est raffiné dans les zones qui sont critiques (la gorge du raccorde-

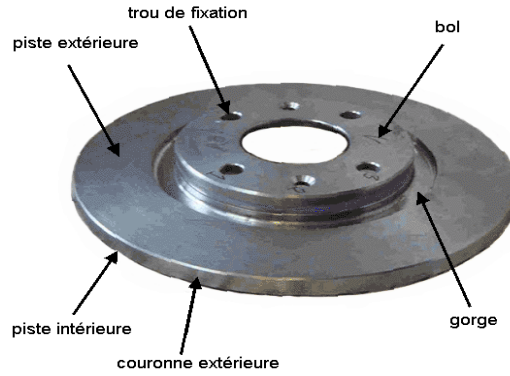


FIG. 3.18: Le disque plein M49

ment) et dans l'épaisseur des pistes de frottement puisque les études antérieures montrent que les gradients thermiques sont très élevés dans cette direction. L'épaisseur des éléments se trouvant à la surface de frottement est  $e_{min} = 1,8 \text{ mm}$ . Les éléments 3D sont disposés en 40 sections angulaires (*figure 3.20*). La plus petite section est de  $5^\circ$  et la plus large est de  $15^\circ$ . On remarque donc que la discrétisation angulaire est irrégulière. Cela permet de mieux évaluer les gradients thermomécaniques dans la zone la plus chargée (qui se trouve sous les plaquettes) et de diminuer le nombre de degrés de liberté en maillant plus grossièrement dans les autres zones. On rappelle que cette irrégularité de maillage est une possibilité offerte par les algorithmes eulériens développés et décrits dans la partie (2).

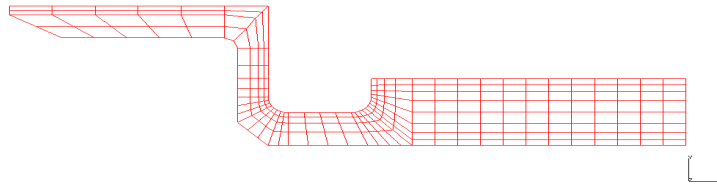


FIG. 3.19: Maillage d'une section 2D du disque plein

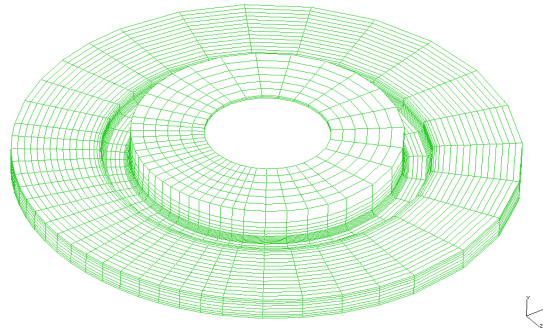


FIG. 3.20: Maillage 3D du disque plein

### 3.2.2.2 Description du banc dynamométrique

Les essais ont été réalisés sur un banc dynamométrique, afin de permettre un bon contrôle et une bonne reproductibilité des conditions d'essais. On rappelle que le but recherché est la validation des méthodes de calcul par des comparaisons calculs/essais et non la reproduction exacte des conditions de freinage sur véhicule et sur route.

Le banc dynamométrique à inertie (*figure 3.21*) se compose de :

- un arbre moteur entraîné par un moteur électrique dont la vitesse peut être variable ;
- des volants d'inerties fixés sur l'arbre moteur qui permettent de varier l'inertie du banc ;
- le disque de frein ;
- une partie fixe sur laquelle est attaché l'étrier ;
- un mesureur de couple qu'on interpose entre l'étrier et la partie fixe du banc.

L'inertie du banc est  $I = 57 \text{ kg.m}^2$ , ce qui correspond à celle du "Citroën Berlingo". Le disque est disposé dans une enceinte dans laquelle est injecté un flux d'air parallèle à l'axe du banc. La vitesse du flux d'air est  $V = 27 \text{ ms}^{-1}$ . L'enceinte est un parallélépipède de profondeur  $270 \text{ mm}$ , de largeur  $470 \text{ mm}$  et de hauteur  $470 \text{ mm}$ . Cette ventilation permet de maintenir la température environnant le disque autour d'une valeur de  $25^\circ\text{C}$ .

Les plaquettes qui ont été utilisées sont des plaquettes "Ferodo 769". L'étrier est le "Lucas C54", qui est de type coulissant (cf. chapitre 1.2.2). Le piston a un diamètre égal à  $54 \text{ mm}$ .

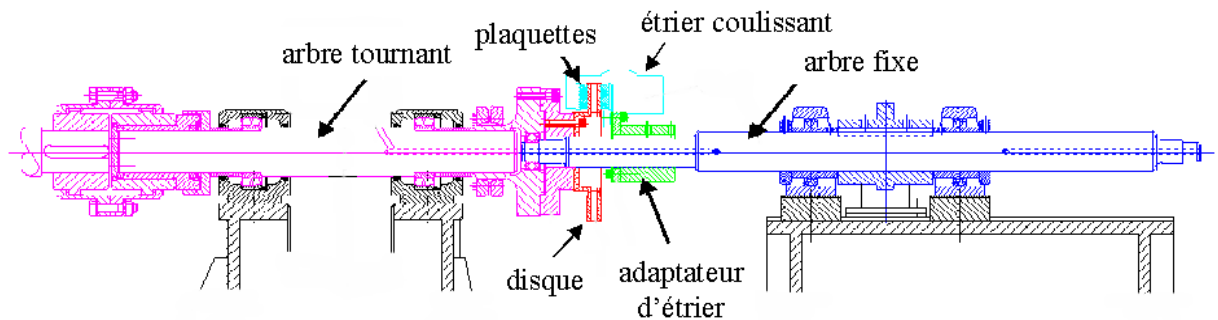


FIG. 3.21: Banc dynamométrique de Federal Mogul



FIG. 3.22: Disque à l'intérieur de l'enceinte

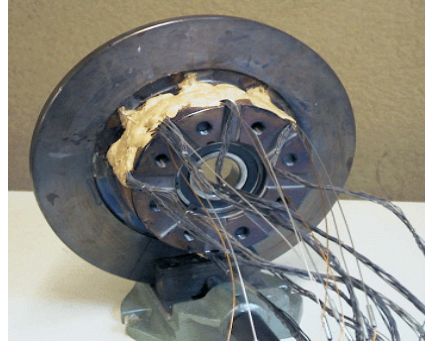


FIG. 3.23: Disque instrumenté

### 3.2.2.3 Description des freinages

Les freinages étudiés sont des freinages d'arrêt. Le disque tourne avec une vitesse initiale  $\omega_o$  prédéfinie ; il est ensuite soumis à une pression hydraulique constante  $P$  jusqu'à ce que sa vitesse devienne nulle. Trois différents freinages ont été simulés, avec une même vitesse véhicule initiale  $V_o$  et trois pressions de piston différentes. Le rayon de roue est  $R_{roue} = 27,3 \text{ cm}$ , ce qui permet de calculer la vitesse de rotation initiale en fonction de la vitesse véhicule. Les données sont récapitulées dans le tableau suivant :

Freinage (a)	$V_o = 150 \text{ km/h}$	$w_o = 154,7 \text{ rad.s}^{-1}$	$P = 15 \text{ bars}$
Freinage (b)	$V_o = 150 \text{ km/h}$	$w_o = 154,7 \text{ rad.s}^{-1}$	$P = 30 \text{ bars}$
Freinage (c)	$V_o = 150 \text{ km/h}$	$w_o = 154,7 \text{ rad.s}^{-1}$	$P = 80 \text{ bars}$

Afin de vérifier la répétitivité des essais et de permettre la réalisation de différentes mesures, ces essais ont été simulés 4 fois. Entre deux freinages, 10 petits freinages dits de reconditionnement ont été programmés afin de retrouver un état de disque "homogène". Ces freinages de reconditionnement sont des freinages à faible pression. La température initiale du premier freinage de la série est  $T_o = 25^\circ\text{C}$ . Les autres freinages n'ont démarré qu'après les freinages de reconditionnement et un certain temps de refroidissement durant lequel la température du disque décroît en dessous de  $T = 40^\circ\text{C}$ . Le tableau (3.14) récapitule l'ordre des essais réalisés.

La série de freinages que nous avons essentiellement simulée est le numéro (c). La température initiale du disque dans les calculs est  $T_o = 40^\circ\text{C}$ . Il faut donc effectuer les corrélations calculs/essais avec les résultats des mesures (3c),(4c) et (5c). La durée du freinage est  $\Delta t = 5,09\text{s}$ .

Freinage (2a)	axe 1
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (2b)	axe 1
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (2c)	axe 1
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (3a)	axe 1
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (3b)	axe 1
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (3c)	axe 1
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (4a)	axe 2
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (4b)	axe 2
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (4c)	axe 2
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (5a)	axe 3
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (5b)	axe 3
10 freinages de reconditionnement	
Freinage (5c)	axe 3

(3.14)

### 3.2.2.4 Description des techniques de mesure

#### Mesure de température

La température a été mesurée grâce à deux types de moyen d'acquisition :

- un thermocouple frottant placé face à la piste intérieure du disque, diamétralement opposé au centre des plaquettes. Il est situé au centre de la piste, c'est-à-dire à un rayon  $R_{thermocouple} = 110 \text{ mm}$  ;
- un pyromètre avec 8 capteurs optiques placés face à la piste extérieure du disque. 4 capteurs sont situés avant les plaquettes à  $40^\circ$  du centre des plaquettes (ils donnent la température du disque avant le passage sous les plaquettes) ; les 4 autres sont situés après les plaquettes à  $40^\circ$  du centre des plaquettes (ils donnent la température du disque après le passage sous les plaquettes). La fréquence d'acquisition du pyromètre est de 60 mesures par tour de disque.

La position exacte des capteurs est récapitulée dans la figure (3.24) et le tableau (3.15).



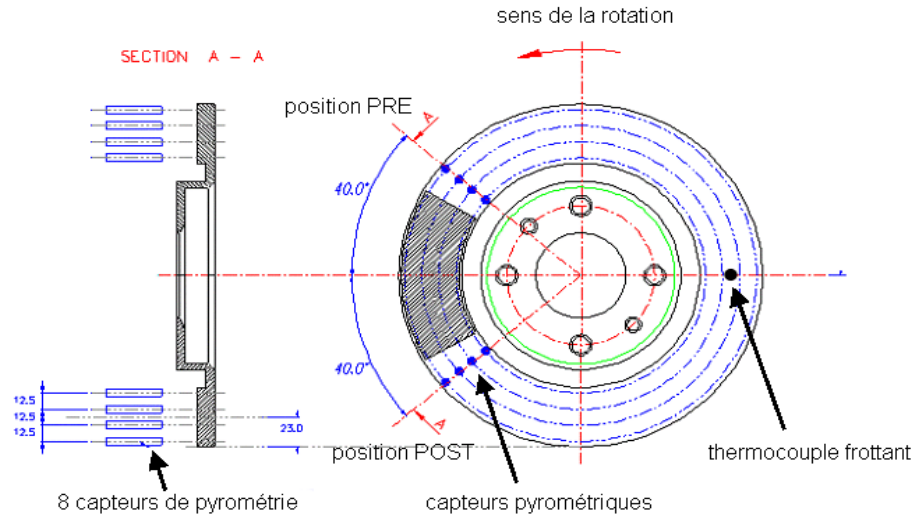


FIG. 3.24: Positionnement des capteurs thermiques

rayon	capteur avant plaquettes	capteur après plaquettes
$R = 91,25 \text{ mm}$	PRE 1	POST 1
$R = 103,75 \text{ mm}$	PRE 2	POST 2
$R = 116,25 \text{ mm}$	PRE 3	POST 3
$R = 128,75 \text{ mm}$	PRE 4	POST 4

(3.15)

Le choix des techniques de mesure est dicté par différents critères :

- le coût et la simplicité d'utilisation ;
- la gamme de température devant être balayée ;
- la précision des mesures ;
- la richesse d'informations recueillies.

Le thermocouple frottant est le moyen de mesure le moins cher et le plus simple à utiliser. En effet, il est simplement posé face au disque et ne nécessite aucun usinage de disque, contrairement aux thermocouples qui sont noyés dans la masse. Comme il est fixe, il peut être directement relié à un système d'acquisition. L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle ne permet de mesurer la température qu'à une position géométrique donnée. De plus, les mesures ne sont valides que si la température ne dépasse pas un seuil proche de  $300^{\circ}\text{C}/350^{\circ}\text{C}$ . Le thermocouple frottant ne permet donc pas de mesurer les températures maximales atteintes par le disque. Comme l'a souligné Eisengraber [38], le temps de réponse des thermocouples frottants est lent. Cela a pour conséquence que si les variations de température sont rapides, les mesures effectuées sont totalement fausses. La courbe (3.25) illustre la différence de mesures obtenues avec un thermocouple frottant

ou avec un thermocouple embarqué. La courbe (a) donne les températures mesurées par les deux types de thermocouple, pour un freinage long à vitesse constante. La montée en température est relativement lente et les deux thermocouples donnent des valeurs assez proches. La courbe (b) correspond à un freinage d'arrêt avec une pression de 40 bars. L'élévation de température est beaucoup plus rapide et le thermocouple frottant n'arrive pas à suivre la montée. De ce temps de réponse long, on déduit que le thermocouple frottant ne donne qu'une température moyenne du disque sur un ou même plusieurs tours. L'inexactitude de la mesure provient aussi du contact non parfait entre le disque et la garniture, qui peut, de plus, être perturbé par des dépôts de matière sur le disque.

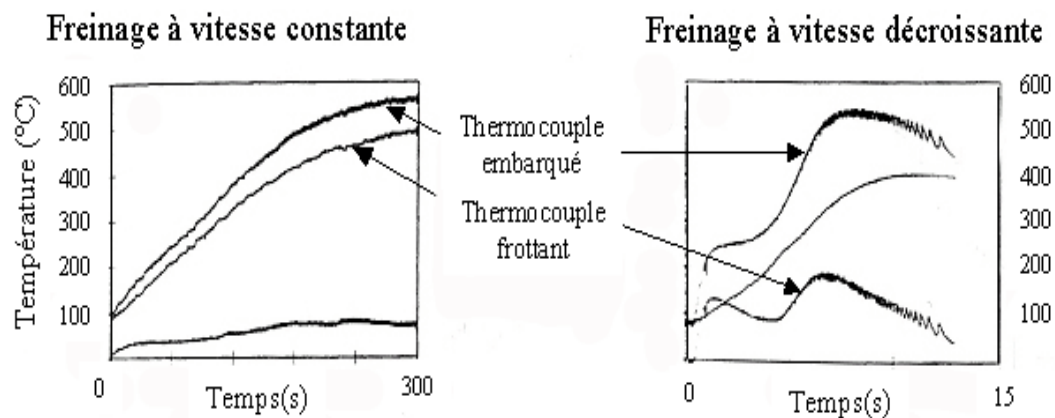


FIG. 3.25: Mesures de température effectuées par thermocouple frottant et thermocouple noyé, par Eisengraber [38]

Le système de mesure par pyrométrie permet alors de compléter les mesures par thermocouple frottant. En effet, par son nombre de capteurs, la pyrométrie permet d'étudier les variations de température selon un rayon du disque. De plus, le temps de réponse étant très court (entre 50 et 100 ms), on obtient aussi une évaluation des variations selon la circonférence. La gamme de validité des mesures complète celle du thermocouple frottant puisque les températures obtenues par le pyromètre sont fiables si elles sont entre  $350^{\circ}\text{C}$  et  $800^{\circ}\text{C}$  environ. Avec le thermocouple frottant et le pyromètre optique, la gamme complète de température d'utilisation du disque de frein est donc balayée. L'inconvénient du pyromètre, hormis son coût, est que la précision des mesures dépend fortement de l'émissivité de la structure. Or, celle-ci varie avec la température. Il faut donc être capable d'évaluer correctement l'émissivité du disque. Enfin, les mesures par pyromètre ne sont envisageables que sur un banc dynamométrique à cause de son grand encombrement.

## Mesure de déformations

Pour la partie mécanique, des rosettes constituées de 3 jauges chacune permettent la mesure des déformations totales en un point donné. Elles sont embarquées sur l'arbre du banc et tournent donc avec le disque. De ce fait, un système de communication par rayons infra-rouges est nécessaire pour permettre la transmission des informations du boîtier d'acquisition à l'ordinateur qui traite les données.

Les rosettes sont placées dans la gorge du disque, à trois positions différentes (1,2 et 3). Il y a trois jeux de rosettes pour trois positions angulaires données : axe 1, axe 2 et axe 3 (*figure 3.26*). Le but est de savoir si la présence des trous de fixation sur la partie supérieure du bol a une influence sur les réponses mécaniques. Les rosettes sont donc au nombre de 9. Mais le système d'acquisition ne permet l'enregistrement simultané que de 3 rosettes. De ce fait, les essais ont été répétés 3 fois (en fait 4 car on voulait vérifier la répétitivité des résultats mécaniques sur un même axe). Chaque série de mesures (2,3,4,5) correspond au branchement d'un seul jeu de rosettes. Les correspondances entre les séries et les axes sont données dans le tableau (3.14).

Les jauges utilisées sont des jauges de déformations encapsulées de type "K" avec des matrices de résine époxyde phénolique renforcées par des fibres de verre.

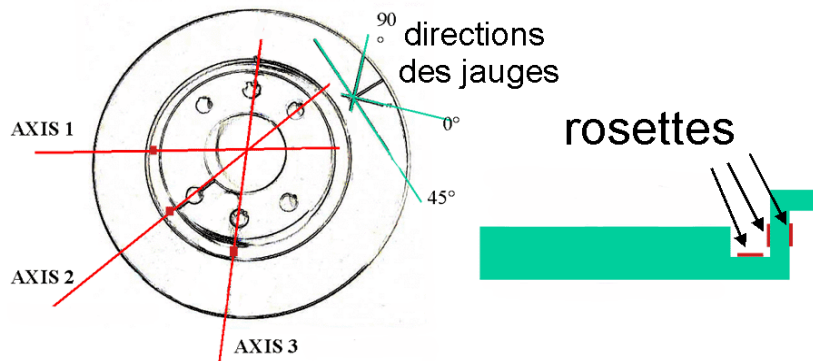


FIG. 3.26: Positionnement des rosettes sur le disque

## Mesures diverses

On dispose également des mesures en temps réel du temps, du couple de l'arbre, de la pression dans le piston et du coefficient de frottement.

### 3.2.3 Evaluation des pressions de contact

Une étude du contact entre le disque et les plaquettes de frein est nécessaire pour l'évaluation des pressions de contact et des efforts de cisaillement qui représentent le chargement mécanique imposé au disque. De plus, le flux de chaleur qui est engendré par le frottement est dépendant du contact.

Deux différentes modélisations du système de frein ont été effectuées. La première, qui sert de référence, consiste à prendre en compte uniquement les deux plaquettes et le disque. La seconde consiste à modéliser en plus l'étrier sous forme d'un assemblage de poutres. Son objectif est d'étudier l'influence du système de serrage sur les résultats, sans augmenter démesurément les temps de maillage et de calcul.

#### 3.2.3.1 Modélisation des conditions aux limites

Les différentes conditions aux limites imposées au disque, compte tenu de son environnement direct, sont les suivantes (*figure 3.27*) :

- au niveau du bol, les noeuds situés sur la face intérieure de la collerette du disque sont bloqués en  $y$  ;
- la rotation du disque est prise en compte par le blocage de tous les degrés de liberté excepté celui qui correspond à la rotation selon la direction  $\mathbf{e}_y$  d'un nœud situé sur l'axe de rotation du disque et coplanaire avec la face extérieure de la collerette de ce dernier. On impose une rotation selon l'axe  $\mathbf{e}_y$  à ce nœud central.

Ce nœud est relié à un groupe de nœuds par des poutres rigides (fonction "MPC BEAM" dans *Abaqus*). Ce groupe comprend les nœuds situés sur la face extérieure de la collerette du disque, sur un rayon correspondant à la position des quatre vis de serrage du disque sur le moyeu.

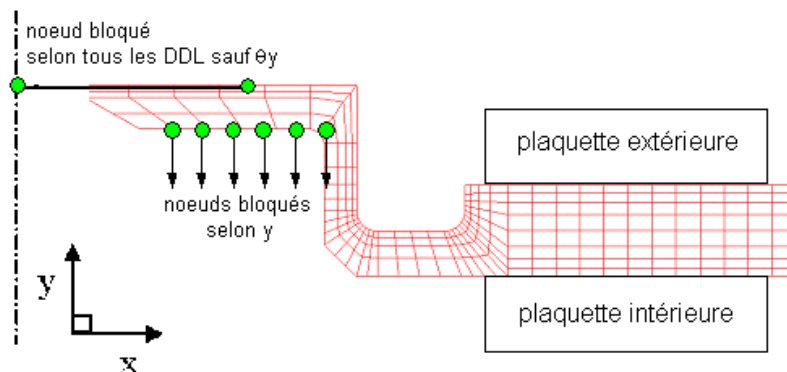


FIG. 3.27: Conditions aux limites imposées au disque

### 3.2.3.2 Modélisation du chargement

Le chargement est représenté par la présence des plaquettes qui viennent presser le disque et qui engendrent des frottements dus à la rotation de ce dernier. Comme il a été décrit dans la partie (1.2.3), une plaquette est composée de deux parties distinctes :

- une garniture faite d'un matériau de friction ;
- un support métallique de très faible épaisseur.

Les garnitures sont modélisées chacune par 720 éléments linéaires à 8 nœuds et à 8 points d'intégration. Ces éléments correspondent aux éléments C3D8 d'*Abaqus*. Le maillage comporte 1040 nœuds. Les supports sont modélisés par 180 éléments de type coque (éléments S4R) dont les nœuds appartiennent aussi au maillage de la garniture (figure 3.28).

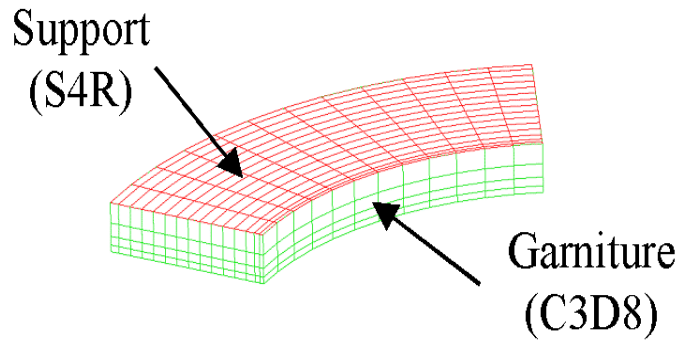


FIG. 3.28: Maillage d'une plaquette de frein

Les caractéristiques élastiques des deux matériaux sont les suivantes :

	module de Young	coefficient de Poisson
garniture	$E = 1 \text{ GPa}$	$\nu = 0,2$
support	$E = 210 \text{ GPa}$	$\nu = 0,25$

Les conditions aux limites appliquées aux plaquettes sont définies en fonction des mouvements autorisés par l'étrier. En effet, un des rôles de l'étrier est de retenir les plaquettes qui ont la tendance naturelle à suivre le mouvement du disque lorsque les deux structures sont en contact. L'étrier maintient aussi les plaquettes dans la direction  $\mathbf{e}_r$ . Ainsi, les conditions imposées aux plaquettes sont (figure 3.29) :

- $u_\theta = 0$  pour les nœuds situés sur le bord de fuite de la face extérieure de chaque plaquette ;
- $u_r = 0$  pour les nœuds situés au centre de la face extérieure.

L'effort de serrage des plaquettes provient de la pression d'un piston hydraulique cylindrique sur le support métallique. On représente donc le chargement par une pression

uniforme sur une surface circulaire correspondant à celle du piston sur les supports (*figure 3.29*).

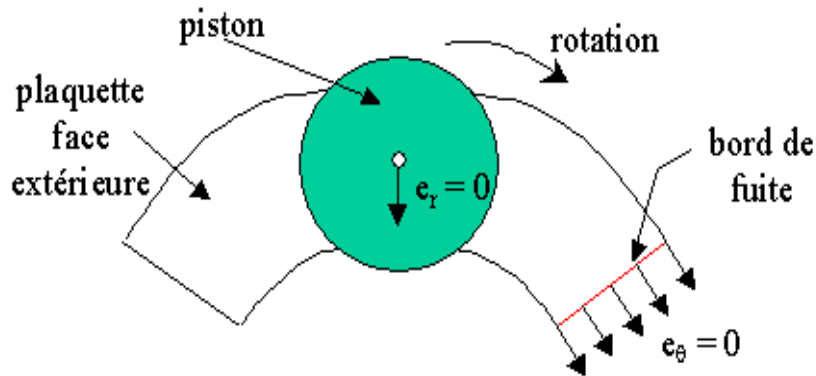


FIG. 3.29: Conditions aux limites et chargement imposés aux plaquettes

### 3.2.3.3 Gestion du contact

La résolution du problème de contact sous *Abaqus* repose sur la définition de deux surfaces potentiellement en contact. L'une est le maître et l'autre est l'esclave, sachant que ce dernier ne peut pas pénétrer le premier. Une formulation avec multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour la résolution numérique du problème (*figure 3.30*).

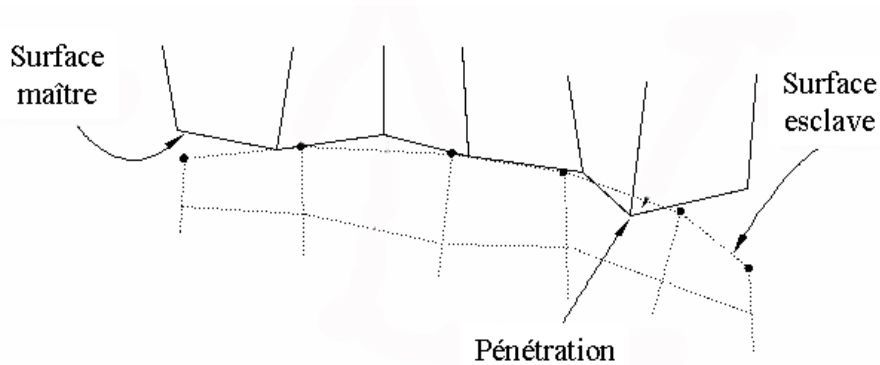


FIG. 3.30: Résolution du problème de contact par l'approche maître/esclave

Pour le problème de contact entre le disque et les plaquettes, on définit, pour chaque côté du disque, un groupe de noeuds esclaves appartenant au disque (fonction "CONTACT NODE SET" dans *Abaqus*) et une surface maîtresse correspondant à celle de la plaquette. Classiquement, lorsque les structures antagonistes ont des finesses de maillage identiques, celle dont le matériau est le plus rigide est choisie comme maître. Ce choix est bien naturel puisque les noeuds de l'esclave respectent une condition de non-pénétration dans la surface maîtresse. Il serait donc plus logique de prendre le disque comme maître. Cependant, les résultats d'un calcul de contact dans *Abaqus* ne concernent que l'esclave. Comme ce

sont les efforts de contact sur le disque et non sur la garniture qui nous intéressent, ce dernier est finalement pris comme esclave. Ce choix a été validé en testant, par le biais de deux calculs similaires, les deux possibilités de cette approche maître/esclave, c'est-à-dire en prenant alternativement le disque comme maître puis comme esclave.

On introduit un coefficient de frottement  $\mu$  pour définir le frottement. Celui-ci dépend de beaucoup de paramètres (pression, vitesse de glissement, température, humidité, etc.) et varie donc au cours d'un freinage. La figure (3.31) montre par exemple les variations du coefficient de frottement lors d'un freinage d'arrêt. Pour des raisons de simplicité, il est pris constant et égal à  $\mu = 0,3$  dans les calculs.

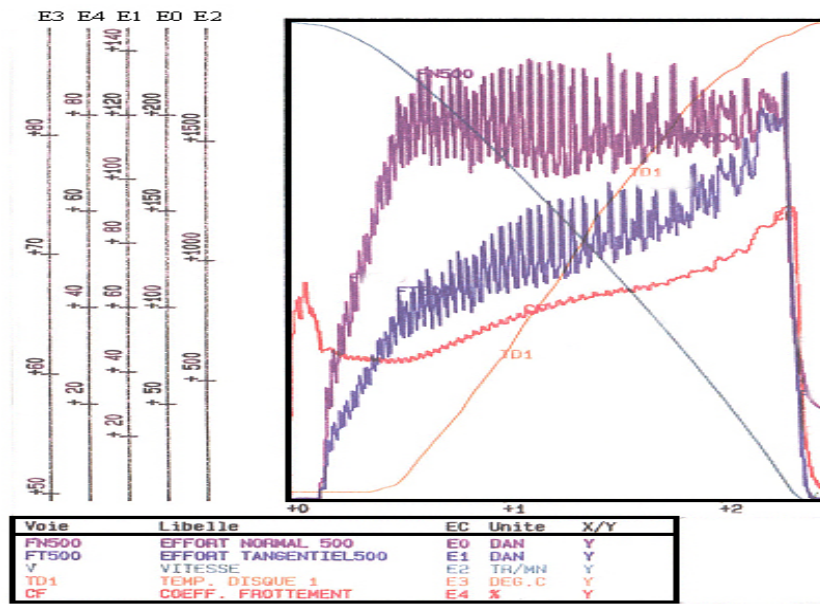


FIG. 3.31: Variations du coefficient de frottement  $\mu$  pendant un freinage

Afin de mettre en évidence l'importance de la rotation du disque sur les efforts de contact, chaque calcul de contact comporte deux incréments de temps différents. Dans le premier, on impose un simple chargement normal à la plaquette. Dans le second, on impose ce chargement et une rotation de disque. Etant donné que le calcul de contact est élastique, le premier calcul n'influe pas le second et la valeur de l'angle de rotation imposé peut être arbitraire.

### 3.2.3.4 Résultats

Les calculs permettent de visualiser les déformations des structures dues au contact entre le disque et les plaquettes. Ils permettront de mieux comprendre les déformations totales du disque lorsque celui-ci est soumis à la pression des plaquettes mais aussi aux dilatations induites par les élévations de température. Ces déformations globales seront discutées ultérieurement. Les résultats des calculs de contact décrits dans cette partie

concernent les déplacements, les contraintes sur le disque, les efforts de contact et la surface réelle de contact.

### Déplacement

Les déplacements des nœuds situés sur la couronne extérieure du disque (à mi-épaisseur) selon la direction  $e_y$  sont présentés dans la figure (3.32). Les deux courbes correspondent aux deux différents calculs, c'est-à-dire avec et sans simulation de la rotation du disque. La pression hydraulique imposée est  $P_h = 80 \text{ bar}$ .

On peut observer un phénomène de mise en parapluie du disque : sous l'effort de serrage, il apparaît un gondolement du disque. Ceci peut s'expliquer par la dissymétrie du disque vis-à-vis des plaquettes, c'est-à-dire par rapport à un plan dont l'axe de révolution du disque serait la normale. On note qu'avec la rotation, le déplacement se dissymétrise et que le phénomène de gondolement prend une plus grande ampleur.

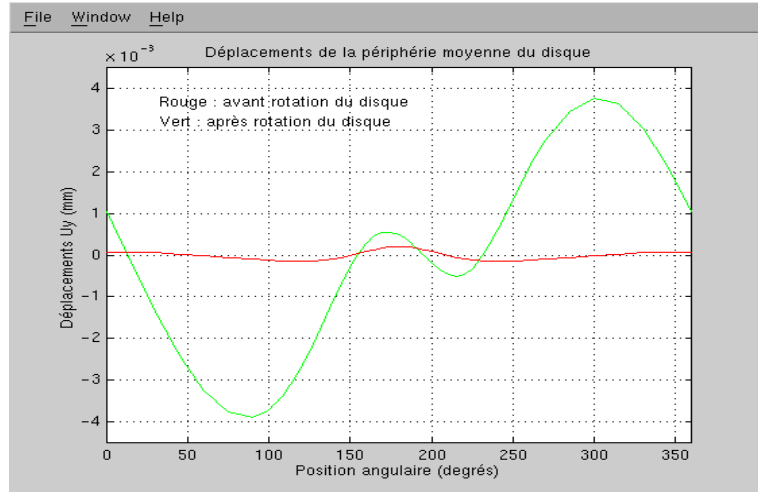


FIG. 3.32: Déplacement sur le rayon extérieur du disque à mi-épaisseur selon la direction  $e_y$

En ce qui concerne les plaquettes, leur mouvement global est également dissymétrique quand on prend en compte la rotation du disque. La figure (3.33) présente les modèles déformés et non-déformés des plaquettes. On observe alors un décollement des bords des plaquettes et un pivotement de celles-ci selon leur axe radial. Ce résultat est tout à fait conforme aux observations faites habituellement avec les disques de frein.

### Contraintes

Les contraintes de traction/compression  $\sigma_{yy}$  et les contraintes de cisaillement  $\sigma_{r\theta}$  dans le disque, respectivement sans et avec rotation, sont présentées dans les figures (3.34), (3.35). Lorsque la rotation n'est pas prise en compte, on observe des contraintes



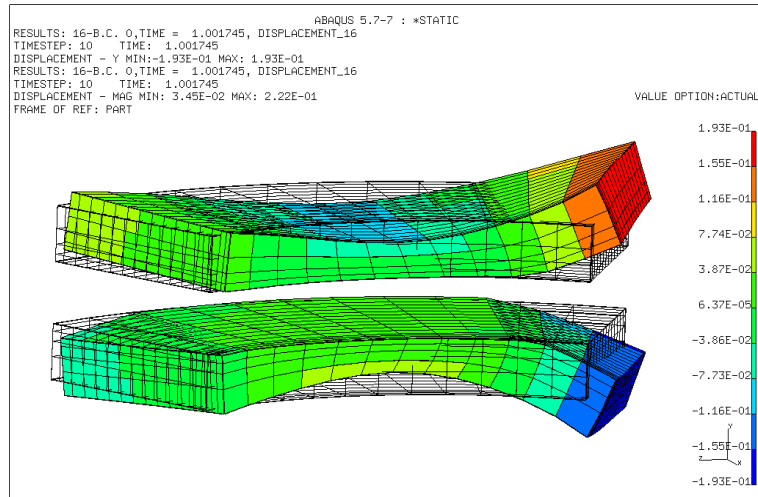


FIG. 3.33: Déformations des plaquettes : décollement et pivotement

de compression maximales de  $7,79 \text{ MPa}$ . Avec la rotation, elles atteignent une valeur égale à  $11,1 \text{ MPa}$ . Pour les contraintes de cisaillement, elles passent de  $0,336 \text{ MPa}$  à  $5,71 \text{ MPa}$ . La prise en compte de la rotation du disque est donc essentielle puisqu'elle a plusieurs effets :

- les contraintes maximales sur les pistes du disque augmentent de manière notable mais elles concernent une zone dissymétrique et moins large que dans le cas d'un contact statique ;
- des contraintes de cisaillement apparaissent au niveau du bol.

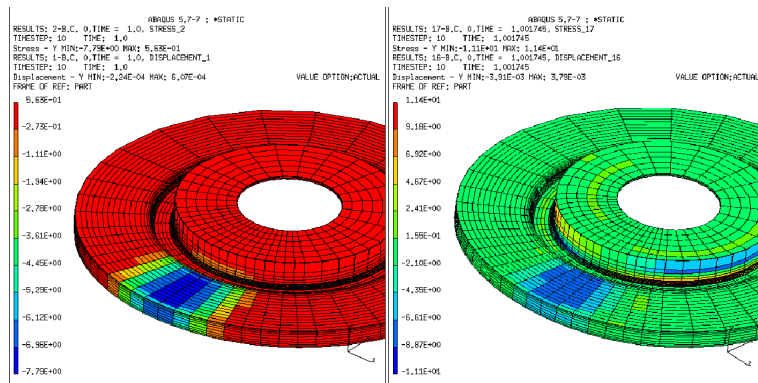


FIG. 3.34: Contraintes  $\sigma_{yy}$  dans le disque

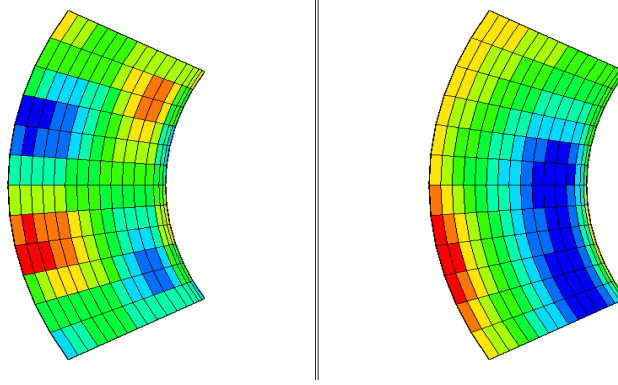


FIG. 3.35: Contraintes  $\sigma_{r\theta}$  dans le disque

### Efforts de contact

Les résultats qui nous intéressent surtout concernent les efforts normaux et tangentiels sur le disque puisque ce sont eux qui seront introduits comme chargement dans le calcul thermomécanique.

Sur les figures (3.36),(3.37), sont représentés les efforts normaux et tangentiels sur la partie du disque qui se trouve en vis-à-vis de la plaquette extérieure. Sur la figure (3.38), sont représentés les efforts normaux et tangentiels le long d'un rayon de la piste, là où les valeurs maximales sont atteintes. On peut remarquer que, sans la rotation, l'effort normal correspond pratiquement à la pression du piston. La valeur maximale se situe vers le rayon extérieur des pistes ( $F_{max} = 286N$ ). L'introduction de la rotation du disque engendre une augmentation de cet effort normal maximal ( $F_{max} = 299N$ ) et décale les isovaleurs vers le bord d'attaque. On peut s'apercevoir que sans la rotation, l'effort tangentiel est très faible et sa distribution est symétrique. Avec la prise en compte de la rotation, on observe qu'il augmente nettement, ce qui était attendu.

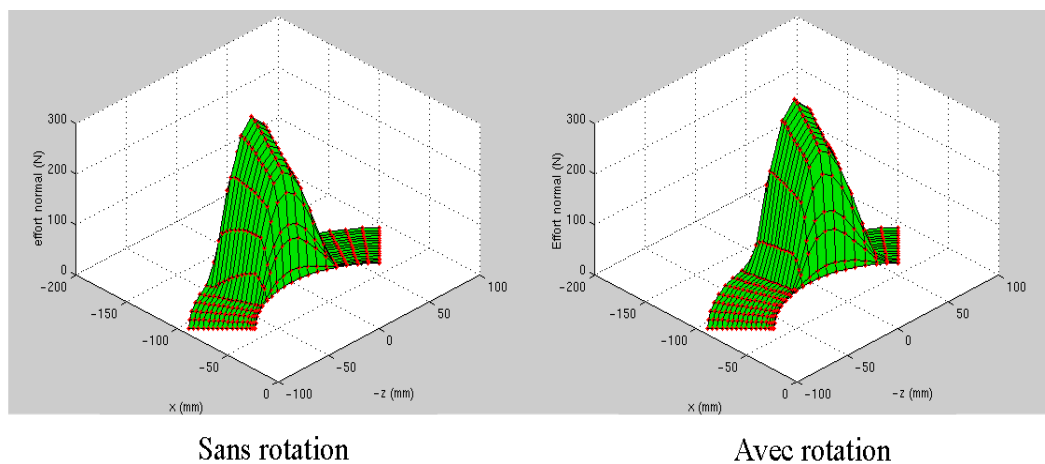


FIG. 3.36: Efforts normaux sur le disque

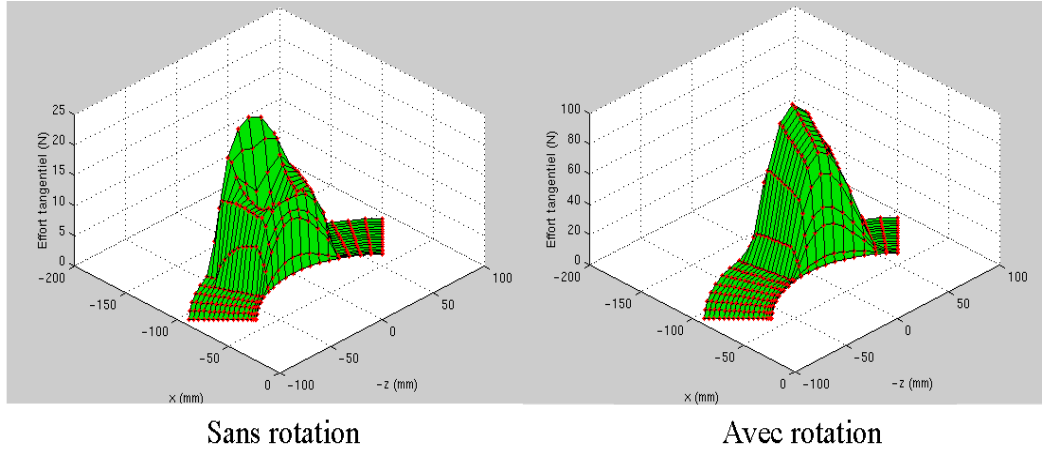


FIG. 3.37: Efforts tangentiels sur le disque

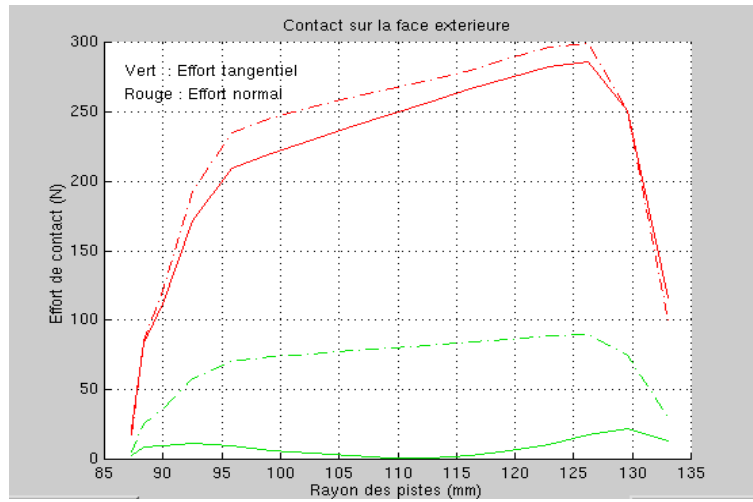


FIG. 3.38: Efforts sur un rayon du disque

### Surface de contact

Les calculs montrent que la surface réelle de contact est très différente de la surface totale des plaquettes. Ainsi, les modélisations dans lesquelles un flux de chaleur et/ou une pression sont imposés sur la surface totale des plaquettes ne sont pas représentatives du système. Les résultats sont présentés sur la figure (3.39). Les surfaces de contact sont les suivantes :

- surface totale d'une plaquette :  $S_p = 5344 \text{ mm}^2$  ;
- surface de contact sans la rotation du disque :  $S_c = 4200 \text{ mm}^2$  ;
- surface de contact avec la rotation du disque :  $S_c = 3154 \text{ mm}^2$ .

Avec la prise en compte du contact et de la rotation du disque, la surface sur laquelle il y a chargement est donc réduite. De plus, elle est déplacée avec la rotation ; ce résultat

est bien sûr lié au mouvement de pivotement des plaquettes décrit plus haut. L'évaluation de la surface réelle de contact est importante car elle permet de calculer le flux entrant dans le disque à partir d'une quantité de chaleur donnée.

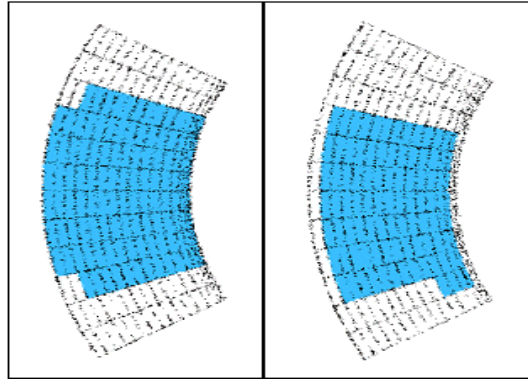


FIG. 3.39: Evaluation des surfaces réelles de contact entre le disque et les plaquettes

### 3.2.3.5 Influence de différents paramètres matériau

Certaines données introduites dans les calculs ne sont pas d'une grande précision et ne sont donc pas très fiables. Il s'agit principalement des données concernant les matériaux. On étudie donc ici la sensibilité des résultats par rapport à deux paramètres : le module de Young des garnitures et le coefficient de frottement entre le disque et les plaquettes. On rappelle que celui-ci varie fortement avec la pression, la vitesse de glissement, la température, etc. Il est donc très difficile de lui attribuer une valeur exacte en fonction de tous ces paramètres. L'étude de sensibilité permettra alors d'évaluer la pertinence des calculs qui ne prennent pas en compte les variations du coefficient de frottement.

#### Module de Young des garnitures

Les plaquettes étant fournies par des équipementiers, elles sont relativement peu étudiées à PSA. De ce fait, la valeur du module de Young des garnitures ( $1 \text{ GPa}$ ) qui a servi aux calculs provient de la littérature. Une rapide étude bibliographique montre que cette valeur varie généralement entre  $0,5 \text{ GPa}$  et  $1,5 \text{ GPa}$ . Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence de ce coefficient quand il varie sur cette gamme sur les résultats.

Les courbes et les isovaleurs sont données dans les annexes A.

Lorsque le module de Young des garnitures augmente de  $0,5 \text{ GPa}$  à  $1,2 \text{ GPa}$ , nous observons :

- dans le cas statique, plus les plaquettes sont souples et plus les déplacements sont élevés ;

- en présence de rotation, les déplacements du disque varient peu ;
- l'effort de contact augmente avec le module de Young des garnitures, mais pas de manière proportionnelle. En effet, la tangente à la courbe a une pente qui diminue lorsque le module augmente ; l'effort normal semble converger vers une valeur limite.
- la surface de contact diminue avec le module de Young des garnitures, mais ce phénomène est moins marqué dès lors que l'on introduit la rotation du disque. En effet, avec la rotation, la surface de contact tend vers une surface limite.

### Coefficient de frottement

Les courbes et les isovaleurs sont données dans les annexes A.

En l'absence de rotation, les résultats varient très peu avec le coefficient de frottement, ce qui est tout à fait logique. En revanche, avec la rotation du disque, les déplacements, la surface réelle de contact mais surtout les efforts tangentiels sont fortement modifiés.

### Conclusion

En conclusion, on note que, en présence de rotation, lorsque le module de Young des garnitures varie de  $0,5 \text{ GPa}$  à  $1,2 \text{ GPa}$  et que le coefficient de frottement varie de  $0,25$  à  $0,4$  :

- les efforts normaux varient de  $270 \text{ N}$  à  $290 \text{ N}$  ;
- les efforts tangentiels varient de  $80 \text{ N}$  à  $140 \text{ N}$  ;
- la surface réelle de contact varie de  $3150 \text{ mm}^2$  à  $3350 \text{ mm}^2$ .

Finalement, on a une imprécision de l'ordre de 30% sur les efforts tangentiels. Les autres quantités sont relativement bien évaluées. Les calculs thermiques et mécaniques présentés ultérieurement montreront que cette imprécision ne sera que du second ordre sur les résultats thermomécaniques du disque.

### 3.2.3.6 Modélisation de l'étrier

Dans cette partie, on présente une deuxième modélisation du contact qui tient compte de l'étrier. Le but est de mieux modéliser les déplacements et rotations des plaquettes extérieure et intérieure. Toutefois, pour éviter de mailler l'étrier et d'ajouter trop de degrés de liberté au modèle global, la pièce est représentée par un système de poutres déformables. Le schéma (3.40) représente le modèle.

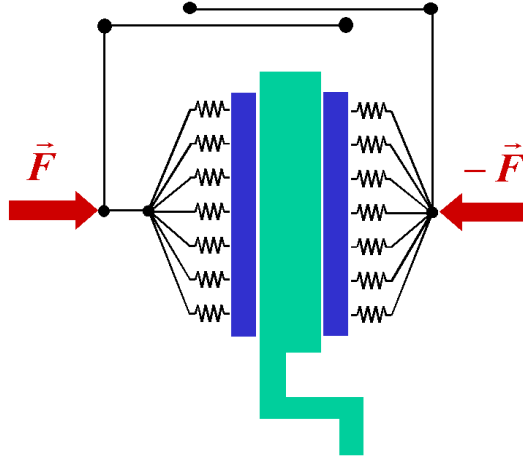


FIG. 3.40: Modélisation du système disque/plaquettes/étrier

Le module de Young des poutres est  $E = 1000 \text{ GPa}$ . Les deux points d'application des efforts (calculés à partir de la pression hydraulique et du diamètre du piston) sont bloqués selon tous les degrés de liberté excepté celui selon la direction  $\mathbf{e}_y$ . Le système de coulissage de l'étrier est reproduit à l'aide de l'option MPC SLIDER d'*Abaqus*. Celle-ci impose à un nœud prédéfini de rester sur une droite définie par deux autres nœuds, tout en lui offrant la possibilité de se translater le long de cette ligne. Comme le montre la figure (3.40), le coulissage est représenté par deux systèmes de glissement.

D'autre part, la liaison entre l'étrier et les plaquettes est assurée par le système suivant :

- les deux points d'application des efforts sont reliés, par des poutres rigides, à des nœuds alignés et parallèles aux supports de chaque plaquette ;
- des ressorts axiaux (option SPRING A d'*Abaqus*) font la liaison entre ces nœuds et les supports métalliques.

Le reste du modèle global reprend celui décrit antérieurement. Toutefois, les plaquettes ont été maillées plus finement (2 400 éléments).

Les résultats concernant les déplacements  $u_y$  sur le rayon extérieur du disque sont présentés sur la figure (figure 3.41). On remarque que le phénomène de mise en parapluie

est accentué avec la modélisation de l'étrier. En ce qui concerne les efforts de contact, on remarque que d'une part, les pressions de contact sont plus élevées avec le système de l'étrier (+2,2%), mais que cette augmentation est négligeable (*figure 3.42*). Par contre, la surface de contact est notablement plus importante. Quant aux contraintes  $\sigma_{xz}$ , elles sont nettement plus élevées (+22,4%). Ceci s'explique par le fait qu'un degré de liberté supplémentaire a été introduit et par conséquent, le frottement est plus conséquent. Pour conclure sur cette modélisation, on s'aperçoit que l'introduction de l'étrier dans ces calculs apporte une amélioration sur la prédiction du comportement global du système. Mais comme pour les paramètres de la loi de comportement du matériau, nous verrons que l'influence de l'étrier est du second ordre sur la réponse thermomécanique du disque.

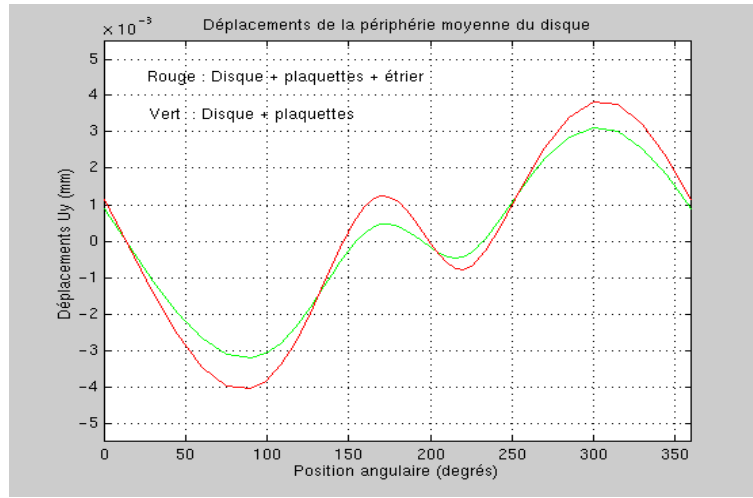


FIG. 3.41: Déplacement  $u_y$  du disque avec la modélisation de l'étrier

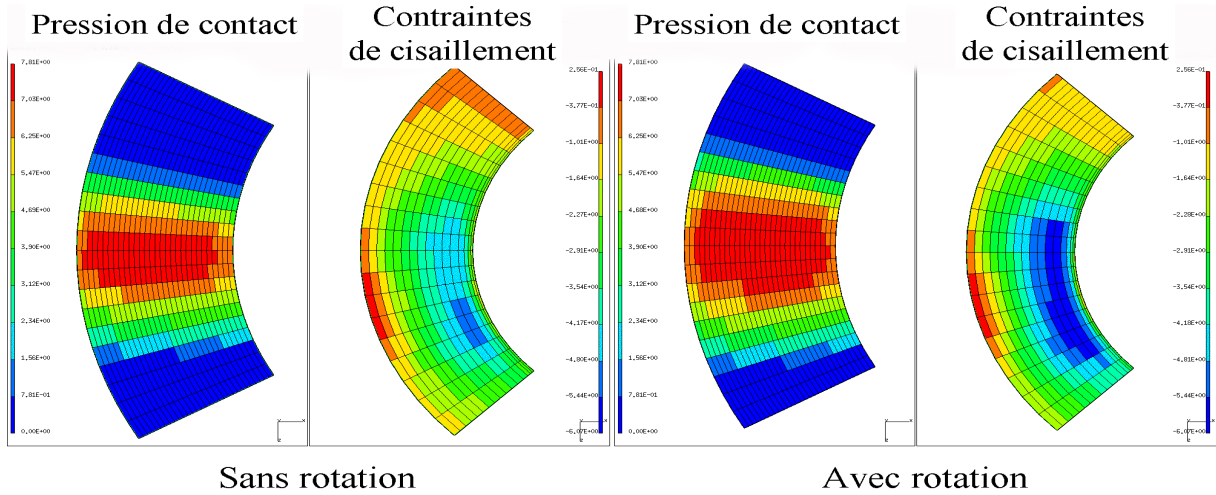


FIG. 3.42: Efforts normaux et tangentiels sur le disque avec la modélisation de l'étrier

## 3.2.4 Calcul thermique

### 3.2.4.1 Introduction

L'analyse thermique est une étape primordiale de l'étude globale du disque car la température conditionne au premier ordre la réponse mécanique de la structure. Il est donc important de déterminer avec précision l'histoire thermique du disque. Pendant un freinage court (freinage d'arrêt par exemple), la température n'a pas le temps de se stabiliser dans le disque. L'analyse doit donc être transitoire. Il est également essentiel d'évaluer les gradients thermiques (orthoradiaux entre autres), ce qui impose une modélisation tridimensionnelle du problème. Le chargement thermique consiste en un flux de chaleur entrant dans le disque au niveau des plaquettes de frein. Le disque est donc soumis à un chargement mobile de son point de vue. Le calcul thermique sera alors effectué avec l'algorithme TRC présenté dans la partie (2.4) (Transitoire dans le Repère du Chargement).

Durant l'étape de refroidissement, le disque ne subit plus de chargement mobile. L'utilisation de l'algorithme TRC n'est donc plus utile. Un simple calcul thermique statique sera effectué. Il serait trop compliqué de simuler les 10 freinages de reconditionnement ; on laisse donc le disque refroidir naturellement par convection. Quand la température maximale du disque devient inférieure à  $40^{\circ}\text{C}$ , on arrête le calcul de refroidissement.

Dans cette modélisation, seul le disque est pris en compte. On présente la simulation du freinage d'arrêt qui correspond au freinage (c) du tableau (3.2.2.3). Le freinage de type (b) a également été étudié. Les résultats de ce dernier calcul sont donnés dans les annexes B.

### 3.2.4.2 Chargement et conditions aux limites

La première difficulté du calcul thermique, hormis celles évoquées dans la partie (1.5) (calcul transitoire, 3D, rotation du disque, etc.), est la modélisation du chargement. En effet, le flux de chaleur qui entre dans le disque est généré par le frottement. Il doit donc être uniquement localisé sur la surface réelle de contact. Son expression théorique est :

$$\phi = \mu V P$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement local,  $V$  la vitesse de glissement du point considéré et  $P$  la pression de contact.

Comme nous l'avons vu précédemment, le coefficient de frottement varie fortement pendant un freinage et il dépend de divers paramètres. De même, la pression de contact est difficile à évaluer puisqu'elle varie aussi avec le coefficient de frottement, la température,



etc. Pour contourner cette difficulté, le flux de chaleur est déterminé à partir de la perte d'énergie cinétique du véhicule ou du banc. Ce choix a l'avantage de permettre l'introduction dans le calcul d'une donnée "véhicule". En effet, la perte d'énergie cinétique dépend de l'inertie du banc. Or, on sait que pour une même vitesse initiale et une même pression hydraulique, un disque va chauffer différemment selon l'inertie du véhicule.

Pour un banc d'inertie  $I$ , tournant à une vitesse initiale  $\omega_o$ , la perte d'énergie cinétique durant un freinage d'arrêt est :

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} I \omega_o^2$$

On fait l'hypothèse que la vitesse de rotation décroît linéairement avec le temps, soit :

$$\omega(t) = \omega_o \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$$

où  $\Delta t$  est le temps total de freinage. On en déduit l'énergie cinétique du disque au temps  $t$  :

$$E_c(t) = -\Delta E_c \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)^2$$

L'expression du flux de chaleur injecté dans le disque en fonction du temps  $t$  est alors :

$$\phi(t) = 2 \frac{\Delta E_c}{S_c} \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{t}{\Delta t^2}\right)$$

où  $S_c$  est la surface totale de contact (des deux côtés du disque).

Le chargement thermique est donc représenté par ce flux thermique que l'on injecte uniquement sur la surface réelle de contact.

Les conditions aux limites imposées au disque consistent à de la convection sur toutes les surfaces libres du disque. La valeur imposée est  $h = 150.10^{-6} \text{ Wmm}^{-2}\text{K}^{-1}$ . Comme le moyeu n'est pas modélisé, une convection constante de valeur  $h = 600.10^{-6} \text{ Wmm}^{-2}\text{K}^{-1}$  est imposée sur les surfaces en contact. Les conditions aux limites sont représentées dans la figure (3.43).

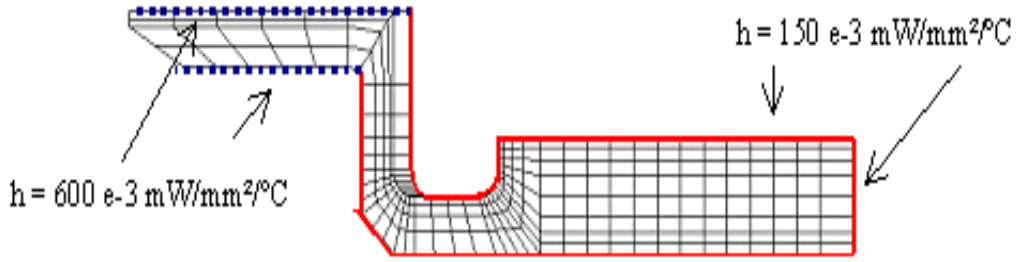


FIG. 3.43: Coefficients de convection imposés sur le disque

### 3.2.4.3 Résultats et corrélations

Les premiers calculs permettent d'évaluer l'évolution du champ de température qui atteint une valeur maximale de  $T_{max} = 540^{\circ}C$ , à l'instant  $t = 3,4 s$ , qui n'est pas la fin du freinage. La figure (3.44) montre que la distribution de la température est inhomogène au moment où la température maximale est atteinte. On note que les écarts de température dans la direction orthoradiale sont de l'ordre de  $50^{\circ}C$ . Ce calcul 3D transitoire comporte 1517 incréments de temps pour la simulation du freinage et 11 incréments pour le refroidissement. Il dure 13 665 s CPU sur un IBM *Power3/OS-433*.

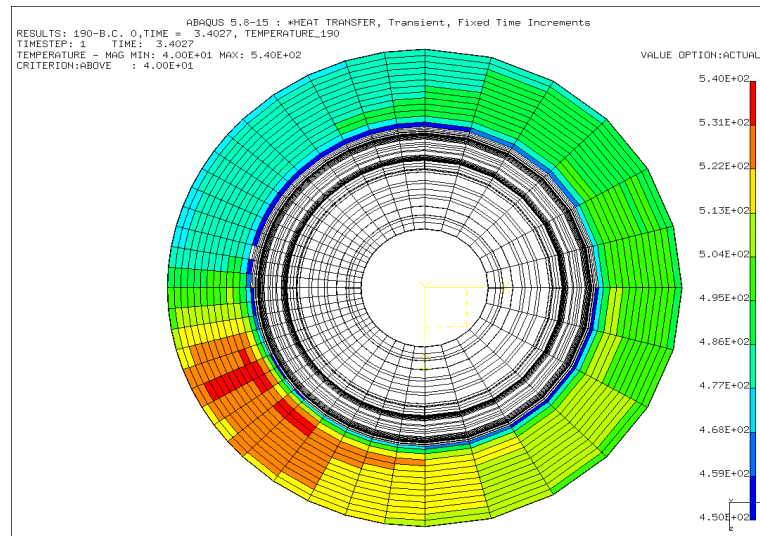


FIG. 3.44: Distribution de la température sur le disque à  $t = 3,4 s$

La figure (3.46) compare la température relevée par le thermocouple frottant et celle issue du calcul au nœud dont la position correspond à celle du thermocouple. On note que du fait que le calcul se fasse dans le repère fixe du chargement, le thermocouple correspond à un nœud également fixe du maillage du disque. Ce nœud est représenté dans la figure (3.45). Les températures issues du calcul sont nettement supérieures à celle du thermocouple. En effet, à cette position, la température maximale calculée est de l'ordre de  $500^{\circ}C$ , alors que celle du thermocouple varie entre  $387^{\circ}C$  et  $418^{\circ}C$  selon le numéro d'essai. Cette différence peut essentiellement être attribuée au fait que le thermocouple ne

donne plus de valeur fiable au delà de  $300/350^{\circ}C$  et que le contact entre le thermocouple et la piste du disque n'est pas parfait. Les pentes des courbes sont également différentes : la montée en température calculée est plus rapide que celle qui correspond au thermocouple. Ce phénomène est dû au temps de réponse du thermocouple.

La figure (3.47) compare la température relevée par les capteurs  $n^{\circ}4$  du pyromètre (avant et après le passage sous les plaquettes) et celle issue du calcul aux noeuds correspondants (figure 3.45). Les résultats sont assez satisfaisants puisque les écarts entre les valeurs maximales sont de l'ordre de  $40^{\circ}C$ . La précision du pyromètre utilisé est de l'ordre de  $50^{\circ}C$ .

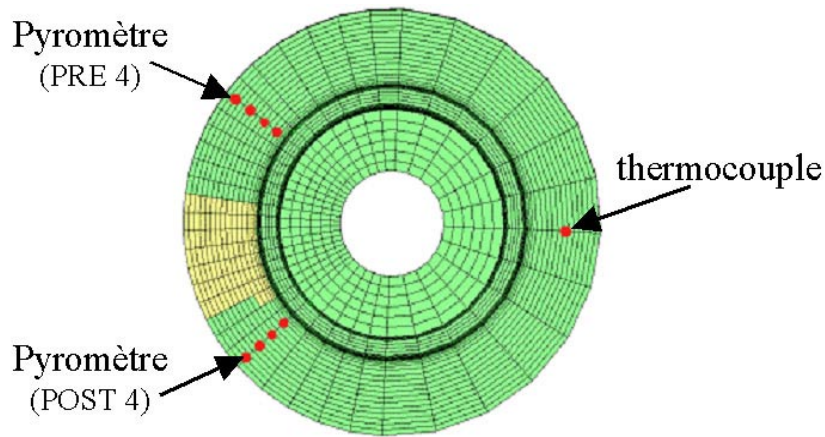


FIG. 3.45: Emplacement des noeuds servant à la corrélation thermique

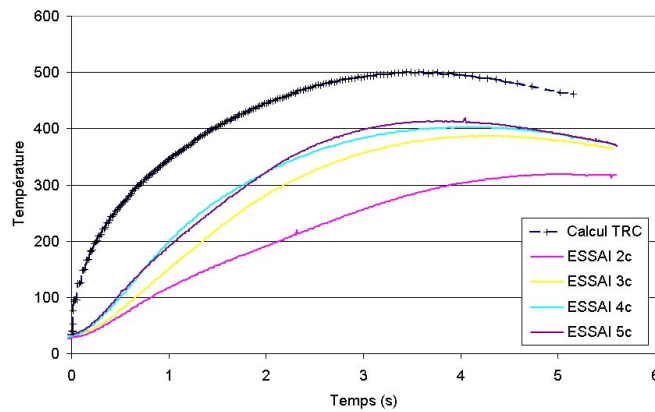


FIG. 3.46: Comparaison de la température issue du calcul et du thermocouple frottant

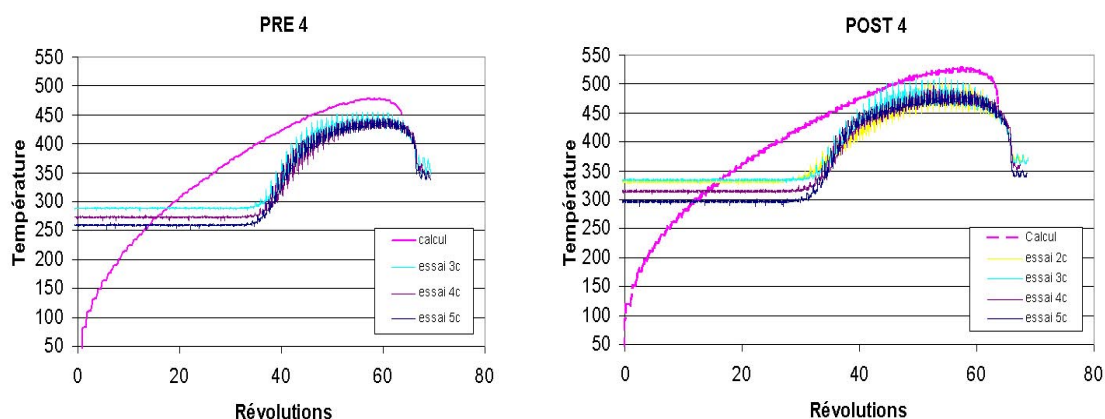


FIG. 3.47: Comparaison de la température issue du calcul et du pyromètre à la position 4

### 3.2.4.4 Comparaison avec un calcul axisymétrique

Un calcul axisymétrique a été effectué afin d'estimer l'erreur induite par l'hypothèse d'axisymétrie. Ce calcul a été réalisé avec le logiciel *Therdisk* de PSA. Le disque est modélisé par une tranche angulaire (*figure 3.48*) d'environ  $5^\circ$ . Un flux est injecté sur tout le secteur angulaire. Cela signifie que l'on suppose que les plaquettes de frein sont circulaires. La température issue du calcul ne représente donc qu'une valeur moyennée du disque sur la circonférence. De plus, les corrélations avec les essais ne sont pas très correctes puisque les mesures se font à des positions angulaires précises.



FIG. 3.48: Modélisation du disque par une tranche angulaire

Les résultats sont donnés dans la figure (3.49). La température correspond à celle d'un point se trouvant sur le même rayon que le thermocouple. La comparaison avec les capteurs du pyromètre, qui est plus pertinente que celle avec le thermocouple pour toutes les raisons évoquées antérieurement, est moins bonne. En effet, la température maximale atteinte avec le calcul axisymétrique est de l'ordre de  $420^\circ\text{C}$ , alors que celle issue des mesures par pyromètre est de  $483^\circ\text{C}$ .

En conclusion, le calcul axisymétrique ne permet que l'évaluation d'une température moyenne du disque. Le calcul 3D permet lui d'obtenir des champs de température qui présentent des gradients thermiques orthoradiaux importants. Le graphe (3.50) montre

que ces gradients sont de l'ordre de  $50^{\circ}C$  pour le freinage à  $80\text{ bar}$ , ce qui est conforme aux essais. On remarque que ces gradients s'établissent assez vite et qu'ils restent ensuite à peu près constants durant toute la phase de freinage.

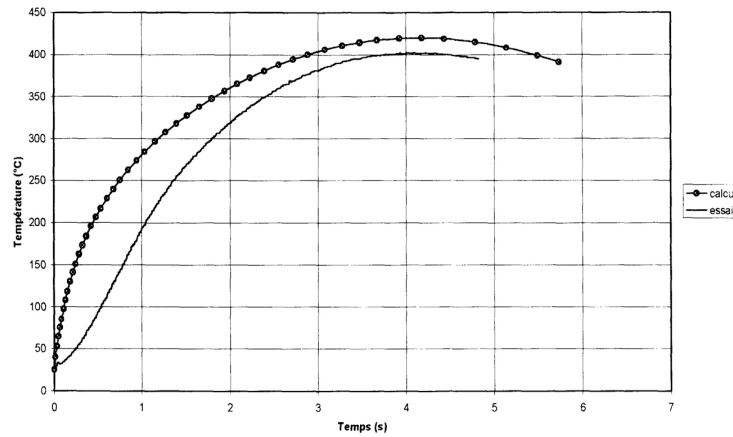


FIG. 3.49: Comparaison des températures issues du calcul axisymétrique et des mesures par thermocouple frottant

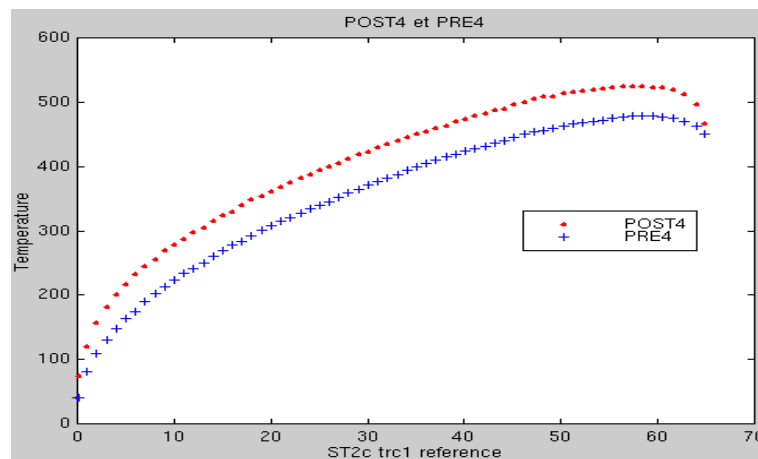


FIG. 3.50: Evaluation du gradient thermique orthoradial entre la position POST et PRE en fonction du nombre de révolutions de disque

### 3.2.4.5 Etude paramétrique

Cette partie consiste en l'étude de la sensibilité des résultats thermiques par rapport à certains paramètres.

#### Convection

Un des paramètres les moins bien connus est le coefficient de convection  $h$ . Nous avons repris les conditions aux limites décrites précédemment en augmentant tous les coefficients  $h$  de 20%. Les résultats montrent que ces changements de valeurs n'ont quasiment pas d'effet sur la température pendant le freinage. Ils n'affectent que la vitesse de refroidissement. Pour la corrélation des calculs/essais des freinages d'arrêt, une imprécision sur ce coefficient n'est donc pas gênante.

### Rayonnement

Les températures maximales atteintes sont de l'ordre de  $500^{\circ}C$ . En général, le rayonnement est négligé pour ces températures. En effet, les phénomènes de rayonnement ne deviennent significatifs que lorsque la température atteint des valeurs très élevées, qui dépendent du matériau utilisé. Pour la fonte en question, on peut négliger le rayonnement en dessous de  $600^{\circ}C$  environ. Un calcul a toutefois été effectué pour vérifier la validité de cette remarque. Avec un coefficient d'émissivité de  $\epsilon = 0,5\%$ , aucune différence n'a été observée avec un calcul sans rayonnement.

### Surface de contact

Dans ce calcul, le flux uniforme de chaleur est imposé sur une surface plus réduite que dans le calcul de référence (*figure 3.51*). Cette simulation représente le cas où les plaquettes ne sont pas en contact avec la piste du disque sur le bord intérieur. La comparaison avec le calcul de référence n'est effectuée que sur 1 seconde de freinage mais cela suffit pour estimer la sensibilité des résultats à ce paramètre. Les résultats sont logiques : une diminution des températures est observée pour les nœuds correspondant aux capteurs  $n^{\circ}1$  du pyromètre, qui se trouvent sur le bord intérieur des pistes, tandis qu'une nette augmentation de la température peut être notée pour les autres nœuds. Ce calcul préliminaire permet de montrer l'importance de la définition de la distribution de flux sur la surface de chargement. Cependant, les écarts de température au niveau des capteurs pyrométriques  $n^{\circ}4$  sont plus faibles dans le calcul de référence. La surface de contact initialement définie par le calcul de contact sera donc gardée pour la suite des calculs.

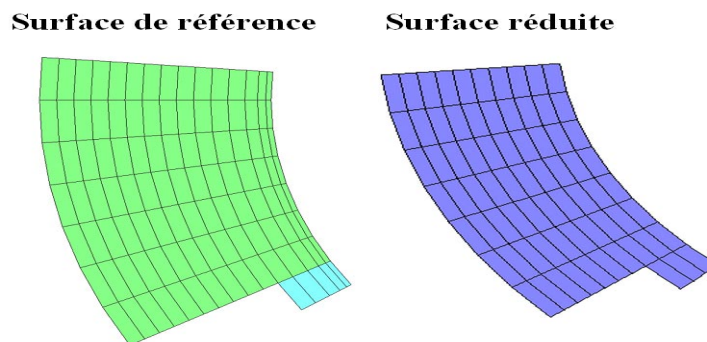


FIG. 3.51: Etude de l'influence de la surface de contact

## Distribution du flux de chaleur

Le calcul de référence montre qu'avec un flux uniforme sur toute la surface de contact, les températures sont quasiment identiques quel que soit le rayon des points postraités. Ce résultat n'est pas conforme aux essais. En effet, sur le graphe (3.52), on voit que les valeurs relevées par le pyromètre dépendent fortement de la position du capteur, selon son rayon : les capteurs  $n^{\circ}4$  (les plus extérieurs) donnent les températures les plus élevées, ensuite ce sont les capteurs  $n^{\circ}2$ , puis  $n^{\circ}3$  et enfin  $n^{\circ}1$ . Cependant, ces observations ne permettent que de conclure sur la dépendance des résultats par rapport au rayon, sachant que le maximum se trouve sur le rayon des capteurs  $n^{\circ}4$  ; les valeurs relevées par les capteurs  $n^{\circ}1, n^{\circ}2$  et  $n^{\circ}3$  sont trop faibles et proches de  $300^{\circ}C$  - valeur minimale de validité du pyromètre - pour que l'on puisse s'y fier.

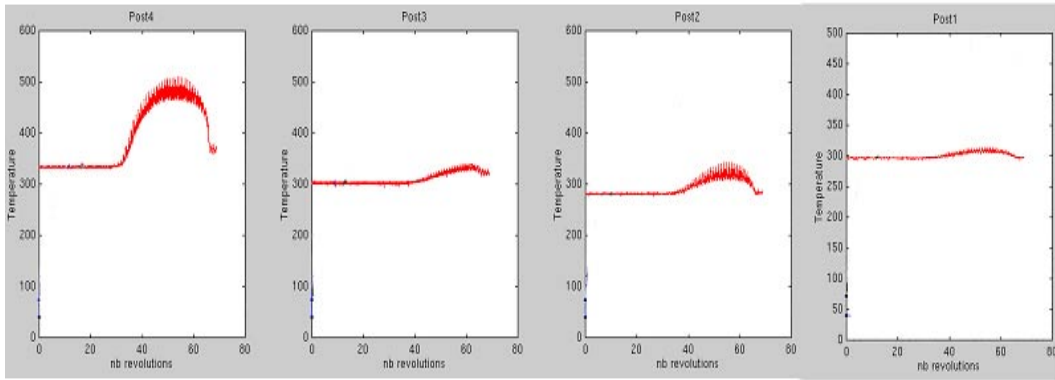


FIG. 3.52: Mesure de température aux 4 capteurs du pyromètre

Il s'agit alors d'introduire dans le calcul un flux de chaleur non uniforme sur la surface de contact afin de mieux corréliser la température aux points correspondants aux capteurs  $n^{\circ}4$ .

On rappelle que le flux thermique engendré par le frottement a pour expression :

$$\phi = \mu V P$$

Soit :

$$\phi = \mu R \omega P$$

Le flux dépend donc de 4 paramètres dont 3 sont des valeurs locales : le coefficient de frottement  $\mu$ , le rayon  $R$  et la pression  $P$ . La vitesse de rotation du disque  $\omega$  est la même quel que soit le point géométrique considéré. Dans un freinage d'arrêt à pression constante, elle est décroissante linéaire avec le temps ; elle est donc facilement évaluée.

## Flux dépendant de la pression de contact

Dans un premier temps, la distribution de flux imposée est proportionnelle à la pression de contact déterminée par le calcul présenté dans la partie (3.2.3). Seule la dépendance de la pression par rapport au rayon  $R$  est prise en compte. Le calcul du flux en chaque point de la zone de contact est expliqué ci dessous.

Soit  $\psi_{tot}$  la quantité de chaleur à introduire sur la surface réelle de contact pendant un incrément de temps donné.  $\phi_{moy}$  est le flux injecté en moyenne sur la surface de contact  $S_c$  correspondant à cette quantité de chaleur. Ainsi,

$$\phi_{moy} = \frac{\psi_{tot}}{S_c}$$

On introduit des coefficients de pondération  $c_i$ , relatifs à la distribution de pression issue du calcul de contact, pour déterminer le flux  $\phi_i$  entrant dans chaque élément  $i$  appartenant à la surface de contact :

$$\phi_i = c_i * \phi_{moy}$$

Ces coefficients  $c_i$  sont donnés dans le tableau suivant. Ils sont constants par rayon.

rayon	nombre d'éléments	$S_i$	$c_i$
rayon 1	16	8,27966744	0,11
rayon 2	16	12,6889058	0,29
rayon 3	16	19,7505647	0,55
rayon 4	16	27,6986763	0,94
rayon 5	16	28,7763604	1,07
rayon 6	14	29,5046819	1,11
rayon 7	14	30,9464330	1,15
rayon 8	14	31,9552333	1,19
rayon 9	14	32,9640336	1,23
rayon 10	14	32,9592339	1,27
rayon 11	14	34,9519636	1,31
rayon 12	14	35,9607639	1,35
rayon 13	14	35,8678251	1,39
rayon 14	14	37,9486939	1,28
rayon 15	14	38,9574942	1,74

Un autre coefficient correctif  $C$  est introduit pour prendre en compte le fait que le nombre d'éléments en contact varie selon le rayon. On fait l'hypothèse que le flux est constant par rayon.



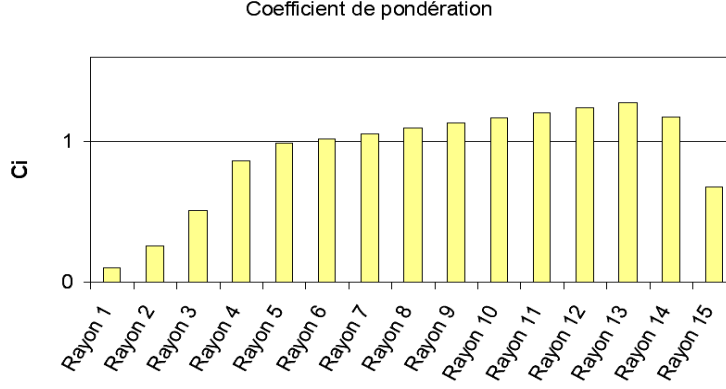


FIG. 3.53: Coefficient de pondération en fonction de la pression de contact

Le flux entrant dans un élément  $i$  devient :

$$\phi_i = C * c_i * \phi_{moy}$$

La quantité de chaleur entrant dans cet élément de surface  $S_i$  est :

$$\psi_i = C * c_i * \frac{\psi_{tot}}{S_c} * S_i$$

Si on somme sur tous les éléments, on doit retrouver  $\psi_{tot}$ , soit :

$$\psi_{tot} = C * \frac{\psi_{tot}}{S_c} * \sum_i (c_i * S_i)$$

D'où :

$$C = \frac{S_c}{\sum_i (c_i * S_i)}$$

Finalement, on a :

$$\phi_i = \frac{c_i \psi_{tot}}{\sum_i (c_i * S_i)}$$

La figure (3.54) donne la distribution de température dans le disque en début de freinage, au 3<sup>e</sup> tour, à  $t = 0,1225$  s. La figure (3.55) correspond à l'instant où la température maximale est atteinte (à  $t = 3,4$  s). Enfin, la figure (3.56) illustre la température en fin de freinage. On note la présence continue d'un gradient orthoradial de l'ordre de  $50^\circ C$ . La figure (3.47) compare les températures calculées et mesurées par les capteurs pyrométriques *PRE 4* et *POST 4*. Les corrélations sont bonnes : la température maximale obtenue par le calcul en *PRE 4* est  $T = 436^\circ C$  alors que celles issues des essais varient entre  $T = 436^\circ C$  et  $T = 440^\circ C$ . La température maximale obtenue par le calcul en *POST*

4 est  $T = 474^{\circ}C$  alors que celles issues des essais varient entre  $T = 475^{\circ}C$  et  $T = 483^{\circ}C$ . Les autres courbes sont données dans les annexes (??). On remarque une très nette augmentation de la température autour des positions 2 et 3 du pyromètre par rapport au calcul avec flux uniforme, ce qui est logique étant donné les coefficients de pondération appliqués dans cette zone, tous supérieurs à 1. La prise en compte de la variation du flux de chaleur par rapport aux variations de pression en fonction du rayon permet donc l'obtention d'une distribution de température très proche de celle observée lors des essais.

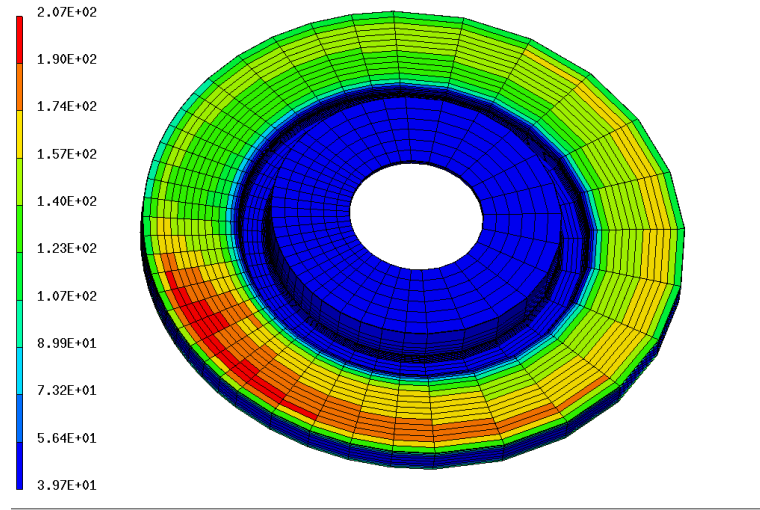


FIG. 3.54: Température calculée en début de freinage avec un flux proportionnel à la pression

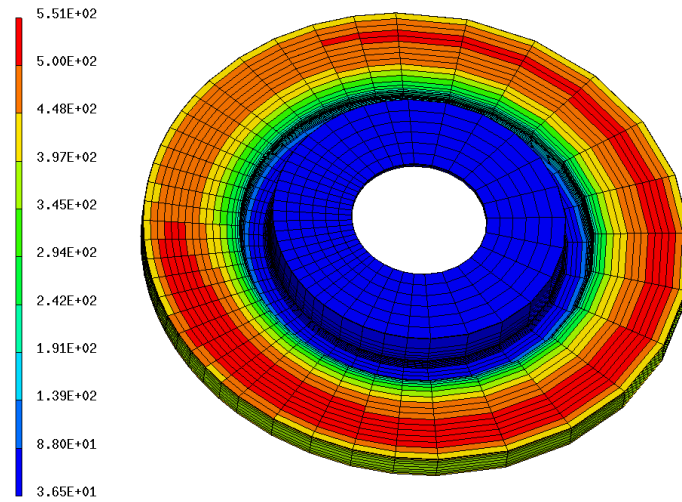


FIG. 3.55: Température maximale avec un flux proportionnel à la pression

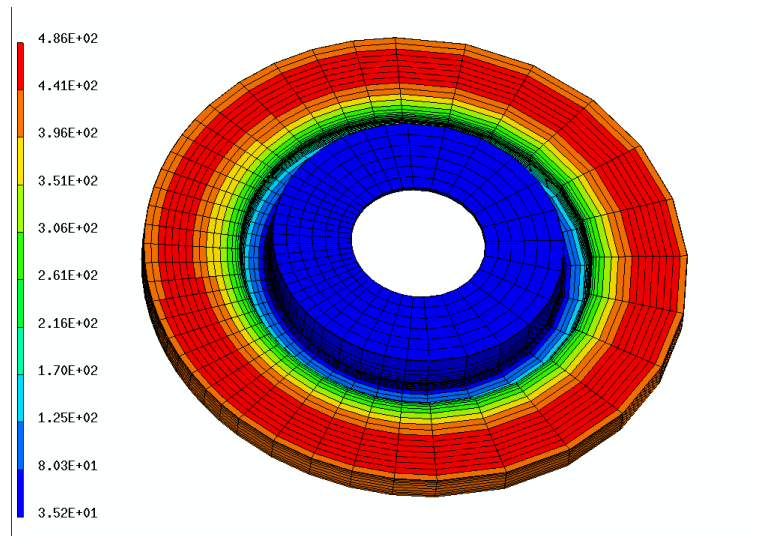


FIG. 3.56: Température calculée en fin de freinage avec un flux proportionnel à la pression

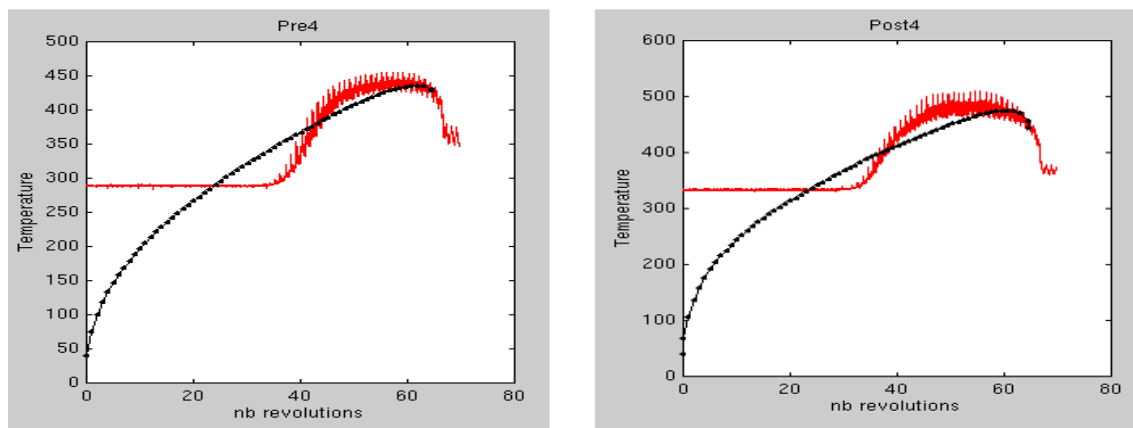


FIG. 3.57: Température calculée avec un flux proportionnel à la pression : valeur correspondant aux capteurs 4 du pyromètre

## Flux dépendant du rayon

Une seconde étude consiste à étudier une distribution de flux proportionnelle au rayon. Le calcul du flux entrant dans chaque élément se fait de la même manière que précédemment, sauf que les coefficients  $c_i$  sont remplacés par des coefficients  $R_i$  qui prennent compte uniquement de l'influence du rayon. Les valeurs sont données dans le tableau suivant.

rayon	nombre d'éléments	$S_i$	$R_i$
rayon 1	16	8,27966744	0,81
rayon 2	16	12,6889058	0,83
rayon 3	16	19,7505647	0,84
rayon 4	16	27,6986763	0,87
rayon 5	16	28,7763604	0,90
rayon 6	14	29,5046819	0,93
rayon 7	14	30,9464330	0,96
rayon 8	14	31,9552333	1,00
rayon 9	14	32,9640336	1,03
rayon 10	14	32,9592339	1,06
rayon 11	14	34,9519636	1,09
rayon 12	14	35,9607639	1,12
rayon 13	14	35,8678251	1,15
rayon 14	14	37,9486939	1,18
rayon 15	14	38,9574942	1,21

Les résultats (*Annexe B*) correspondant à une seconde de freinage seulement montrent la tendance des courbes de température. Elles augmentent dans le sens croissant des rayons des pistes. De ce fait, les valeurs aux points 4 du pyromètre sont plutôt moins bonnes que celles obtenues avec le flux uniforme ou le flux en fonction de la pression de contact. Un écart de  $50^{\circ}C$  au point correspondant au capteur *POST 4* est observé entre ce calcul et le calcul de référence.

## Flux dépendant de la pression de contact et du rayon

Il apparaît donc essentiel de prendre en compte la variation du flux en fonction de la pression. Un dernier calcul est alors effectué avec un flux qui dépend de la pression de contact et du rayon. Les coefficients de pondération sont donnés dans le tableau suivant.

rayon	nombre d'éléments	$S_i$	$R_i * c_i$
rayon 1	16	8,27966744	0,09
rayon 2	16	12,6889058	0,23
rayon 3	16	19,7505647	0,45
rayon 4	16	27,6986763	0,79
rayon 5	16	28,7763604	0,94
rayon 6	14	29,5046819	1,01
rayon 7	14	30,9464330	1,07
rayon 8	14	31,9552333	1,15
rayon 9	14	32,9640336	1,23
rayon 10	14	32,9592339	1,19
rayon 11	14	34,9519636	1,38
rayon 12	14	35,9607639	1,47
rayon 13	14	35,8678251	1,55
rayon 14	14	37,9486939	1,46
rayon 15	14	38,9574942	0,87

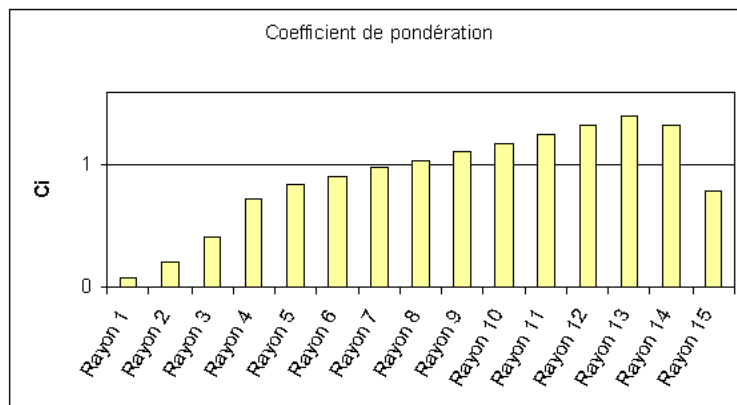


FIG. 3.58: Coefficient de pondération en fonction de la pression de contact et du rayon

Les résultats du calcul sont donnés en annexes (*Annexes B*). Au point *POST 4*, la prise en compte du paramètre  $R$  joue plutôt en défaveur des corrélations calculs/essais. En effet, cette dernière distribution de flux est plus dissymétrique que celle qui ne dépend que de la pression de contact. De ce fait, la température maximale atteinte à la position du pyromètre 4 est plus élevée que la mesure. Finalement, la distribution de flux qui donne les meilleures corrélations avec les pyromètres est celle qui ne dépend que de la pression de contact.

Ce résultat semble surprenant au premier abord car la distribution du flux en fonction du rayon et de la pression est théoriquement la plus représentative de la réalité, à condition d'avoir un coefficient de frottement constant. Or celui-ci varie en fonction du temps et il n'est pas uniforme sur la surface de contact. On fait donc une approximation qui est du même ordre que celles induites par d'autres hypothèses. En effet, le calcul de

contact ne donne une estimation de la surface réelle de contact et de la pression que pour une température initiale donnée. Le freinage engendre pourtant de fortes variations de température. De plus, les phénomènes d'usure des plaquettes et du disque sont négligés, alors qu'ils modifient fortement le contact et les échanges thermiques entre les deux pièces. Finalement, il est difficile d'établir une relation simple entre le flux de chaleur local entrant dans le disque, la pression déterminée par un calcul de contact à température ambiante et le rayon des points géométriques.

L'analyse thermomécanique du disque s'effectuera finalement avec l'histoire thermique issue du calcul TRC avec la distribution de flux dépendante de la pression de contact et du rayon, car cette dernière engendre des températures et des gradients thermiques plus élevés. Le cycle thermique est donc a priori plus sévère que celui correspondant au flux de chaleur qui ne dépend que de la pression. Comme cette dernière distribution donne de meilleures corrélations avec les données du pyromètre, elle sera également étudiée.

## 3.2.5 Calcul mécanique

### 3.2.5.1 Introduction

Le calcul thermique a permis de déterminer l'histoire thermique du disque durant un freinage de type (c). Une analyse mécanique permettra d'évaluer les champs de contraintes et de déformations qui s'établissent dans le disque, dus aux élévations de température, à la pression des plaquettes et aux conditions de serrage du disque.

Ce calcul élastoplastique s'effectue avec l'algorithme stationnaire passage par passage, qui permet de prendre en compte la rotation du disque (avec les passages successifs de la matière sous les plaquettes) et d'estimer la réponse thermomécanique de la structure après chaque tour de disque. Durant l'étape de refroidissement, le disque ne subit plus de chargement mobile ; l'utilisation de l'algorithme stationnaire n'est donc plus utile. Un simple calcul élastoplastique statique sera effectué avec comme chargement les champs de température issus des calculs thermiques de refroidissement. Finalement, le calcul mécanique comportera les incréments de temps suivants :

- 65 calculs stationnaires passage par passage qui simulent les 65 tours de disque du freinage d'arrêt ;
- 1 calcul élastoplastique statique sans chargement mécanique, avec comme température imposée celle de fin de freinage ; cet incrément de calcul correspond à la décharge mécanique du disque, c'est-à-dire au moment où les plaquettes de frein sont rappelées par les ressorts ;
- autant de calculs élastoplastiques statiques qu'il y a d'incrément de refroidissement.

Dans cette modélisation, seul le disque est pris en compte. Le maillage utilisé est celui décrit dans la partie (3.2.2). On présente la simulation du freinage d'arrêt qui correspond au freinage (c) du tableau (3.2.2.3). Des corrélations calculs/essais sont effectuées au niveau de la zone de raccordement. Les champs mécaniques sur les pistes de frottement sont également post-traités et analysés.

Cette étude permet de montrer la faisabilité et la pertinence des calculs tridimensionnels de disque de frein avec l'algorithme stationnaire. En effet, cet algorithme permet de prédire le comportement mécanique du disque, avec des temps de calcul raisonnables. Ces temps de calcul nous permettent alors d'étudier la sensibilité des résultats par rapport à la modélisation du comportement du matériau.

### 3.2.5.2 Chargement et conditions aux limites

Le chargement mécanique est représenté par les efforts de contact (normaux et tangentiels) sur le disque, évalués par le calcul de contact statique présenté dans la partie

(3.2.3). On rappelle que la nature du contact varie avec la température, l'usure des structures, le coefficient de frottement, etc. Ces variations sont négligées. Des calculs (qui ne seront pas présentés) ont permis de montrer que l'imprécision due à cette simplification est du second ordre par rapport au chargement thermique.

A chaque tour de disque, correspond un calcul mécanique stationnaire. On impose alors comme température celle issue du calcul thermique TRC. On suit donc assez finement l'histoire thermique de la structure. On impose ensuite la température évaluée pendant les incréments de refroidissement. Le calcul thermique sur lequel est basé le calcul mécanique présenté dans cette partie est celui pour lequel la distribution du flux de chaleur est déterminée à partir de la pression de contact et de la position radiale de chaque point géométrique (*cf. partie 3.2.4*).

Les conditions aux limites mécaniques imposées au disque correspondent à son serrage sur le banc dynamométrique. Les nœuds situés sur le côté extérieur de la partie supérieure du bol sont bloqués dans la direction  $\mathbf{u}_y$ . En effet, sur le banc, le disque est en appui sur un bâti sur son côté extérieur (*figure 3.21*). Le nœud central introduit pour le calcul de contact est bloqué selon toutes les directions. Il est relié aux nœuds qui correspondent aux vis de serrage. La figure (3.59) schématise les blocages.

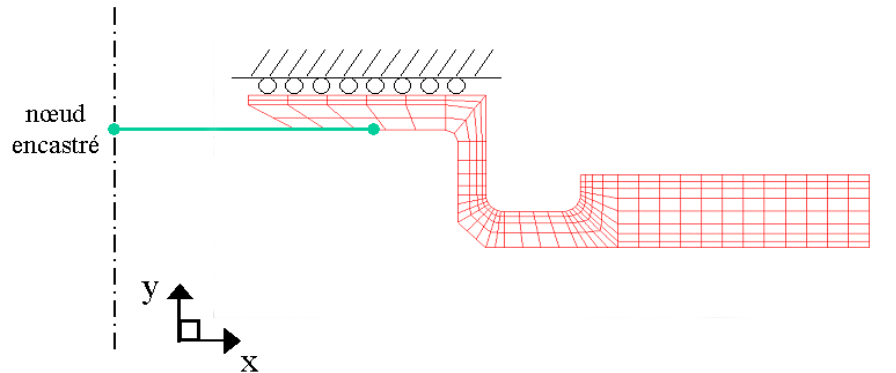


FIG. 3.59: Conditions aux limites mécaniques imposées au disque

### 3.2.5.3 Modélisation du comportement du matériau

Les calculs effectués reposent sur un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire du matériau. Les paramètres de la fonte GLJ2 correspondant à ce modèle rhéologique proviennent des identifications effectuées avec les essais TRR (Traction-Relaxation-Recouvrance) présentés dans la partie (3.1.3). Une identification est faite par valeur de température. En réalité, deux séries d'identification ont été menées, chacune reposant sur un calcul d'erreur différent. La première loi est issue d'une identification qui mesure l'erreur faite sur le niveau des contraintes et sur la valeur de l'énergie dissipée. La seconde loi, quant à elle, n'est basée que sur un calcul d'erreur de niveau de contraintes. Les variations des paramètres du matériau en fonction de la température sont données dans



les courbes (3.60, 3.61, 3.62). Le coefficient de Poisson est pris constant et égal à  $\nu = 0,27$ .

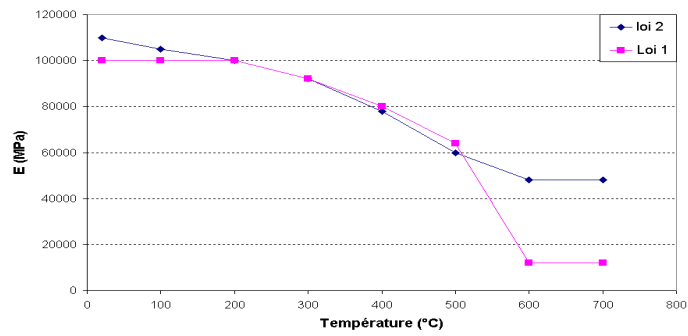


FIG. 3.60: Evolution du module de Young de la fonte GLJ2 avec la température pour les deux identifications

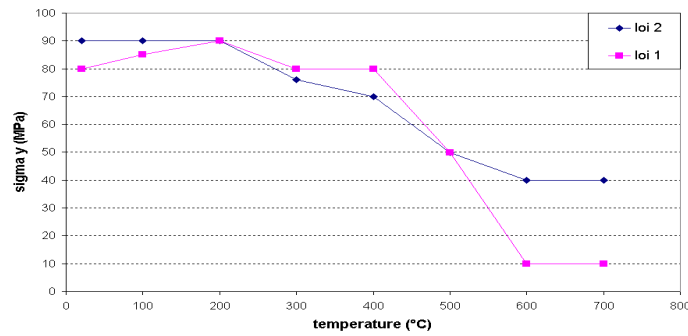


FIG. 3.61: Evolution de la limite d'élasticité de la fonte GLJ2 avec la température pour les deux identifications

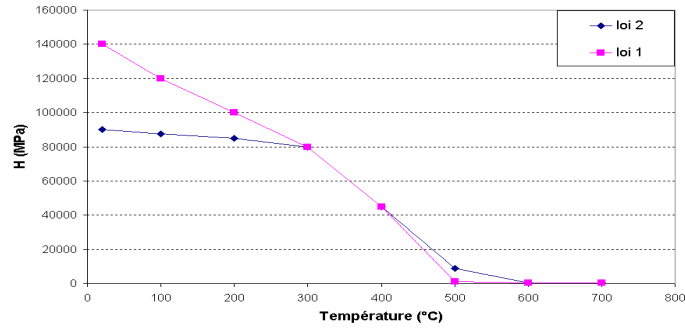


FIG. 3.62: Evolution du coefficient d'écrouissage de la fonte GLJ2 avec la température pour les deux identifications

#### 3.2.5.4 Résultats et corrélations avec les mesures par jauges de déformations

Les calculs mécaniques (passages stationnaires, décharge mécanique et calculs de refroidissement) s'effectuent en environ 40 000 s CPU sur un IBM *Power3/OS-433*.

Dans un premier temps, les résultats numériques sont confrontés aux mesures de déformations par jauge. On rappelle que ces dernières sont effectuées dans la gorge du bol. Les rosettes sont placées à trois endroits différents (jauge 1, jauge 2 et jauge 3). Différents axes sont choisis (axe 1, axe2 et axe3), correspondant à la présence ou non de trous de fixation sur la partie supérieure du bol (*figure 3.63*).

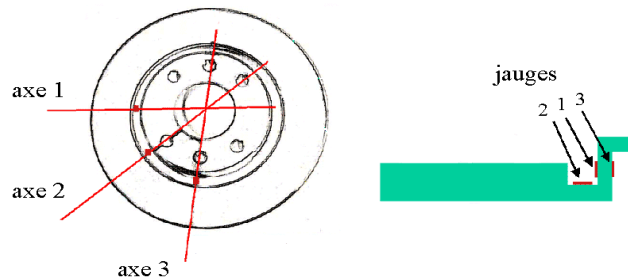


FIG. 3.63: Position et numérotation des jauges de déformation sur le disque

Les mesures issues des essais montrent d'abord que les déformations du disque sont différentes selon que l'on se situe dans la gorge (jauge 2) ou sur le raccordement, côté extérieur (jauge 1) ou côté intérieur (jauge 3). Le tableau suivant donne les valeurs maximales des déformations principales relevées sur les différentes rosettes.

	Axe 1		Axe 2		Axe 3	
	$\epsilon_1(\%)$	$\epsilon_2(\%)$	$\epsilon_1(\%)$	$\epsilon_2(\%)$	$\epsilon_1(\%)$	$\epsilon_2(\%)$
Jauge 1	0,247	-0,223	0,200	-0,278	0,221	-0,236
Jauge 2	0,345	0,223	0,346	0,220	0,317	0,083
Jauge 3	0,353	0,157	0,327	0,066	0,320	0,041

Les directions des déformations principales  $\epsilon_1$  sont données dans le tableau suivant. La définition de l'angle  $\theta$  est donnée par la figure (3.64).

	$\theta$ - axe 1	$\theta$ - axe 2	$\theta$ - axe 3
Rosette 1	$2,5^\circ$	$-2,8^\circ$	$-3,5^\circ$
Rosette 2	$-6,2^\circ$	$-5,8^\circ$	$-11,6^\circ$
Rosette 3	$22,2^\circ$	$16,2^\circ$	$13,2^\circ$

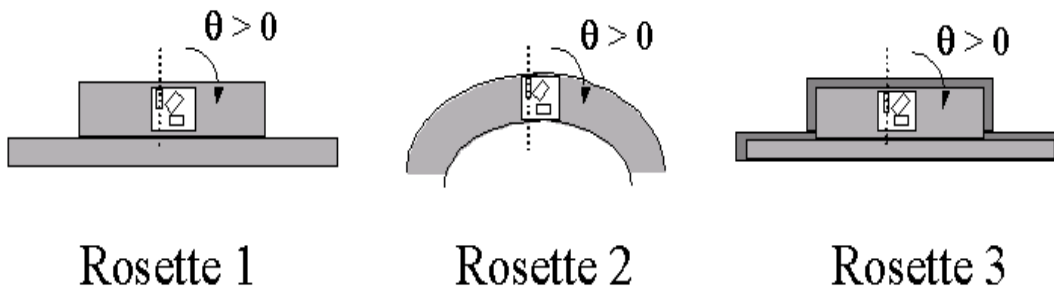


FIG. 3.64: Définition de l'angle  $\theta$  pour les trois rosettes

Le disque tend à se dilater radialement mais il est maintenu par les vis de fixation au niveau de la partie supérieure du bol. Ces contraintes engendrent des déformations qui sont principalement des déformations de traction dans la direction 1. On remarque que le côté intérieur du raccordement (jauge 3) travaille plus en traction que le côté extérieur (jauge 1). Cette différence peut s'expliquer par le fait que le disque se met en parapluie, se déformant vers le côté extérieur.

La courbe (3.65) montre que les déformations principales peuvent varier d'environ 20% selon l'axe de la mesure. Les allures des courbes restent cependant les mêmes. C'est sur l'axe 1 que les déformations sont les plus élevées. Cet axe correspond à une section de disque qui ne subit pas de serrage par vis de fixation ; la structure est donc un peu moins contrainte que les autres sections.

Pour les corrélations avec les mesures par jauges de déformation, des éléments coques ont été ajoutés dans la gorge du disque afin d'obtenir des valeurs en surface. On note que chaque mesure correspond à un élément de matière qui tourne avec le disque. De ce fait, pour retracer numériquement toute l'histoire de cet élément, il faut regarder l'état de tous les éléments du maillage qui appartiennent à la bonne ligne de courant. La figure (3.66) schématise la succession des positions de la particule de matière.

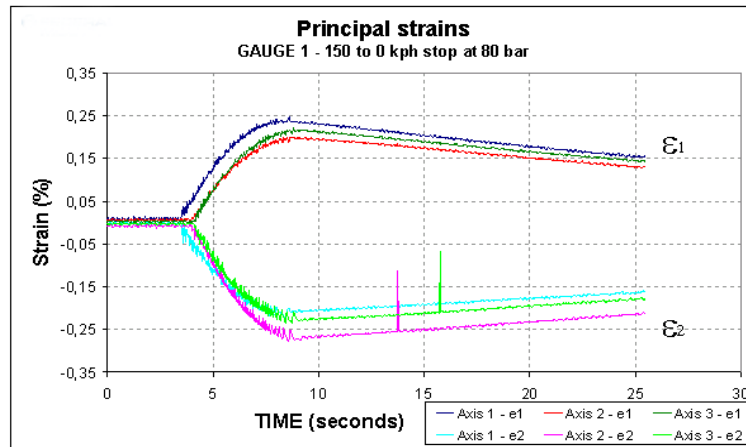


FIG. 3.65: Déformations principales relevées par la jauge 1, selon les axes 1,2 et 3

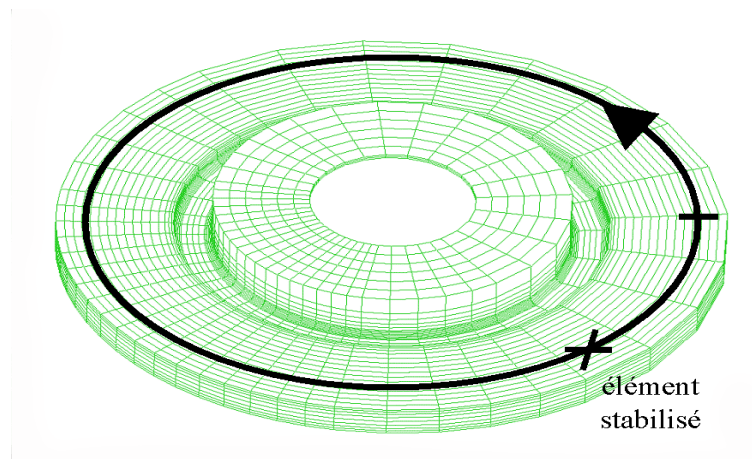


FIG. 3.66: Schématisation d'une ligne de courant qui retrace l'histoire d'une particule de matière

On présente différents calculs : un calcul élastique et plusieurs calculs élastoplastiques (avec les deux jeux de paramètres matériau issus des identifications).

### Première loi matériau

Les courbes (3.67) et (3.68) donnent les valeurs des déformations principales issues des mesures (rosettes  $n^{\circ}1$  et  $n^{\circ}3$ ) et des calculs. Deux différents calculs sont comparés : le calcul élastique et le calcul élastoplastique. La loi élastoplastique donne globalement de meilleurs résultats. Les courbes issues des calculs correspondent aux valeurs prises par l'élément dit *stabilisé* (figure 3.66). Celui-ci correspond à un élément de la ligne de courant pris en amont du chargement, suffisamment "loin" de ce dernier. Comme cela a été expliqué dans la partie qui décrit les algorithmes eulériens (2), cet élément stabilisé donne l'état résiduel de la ligne de courant après le passage du chargement. On a comparé les déformations de plusieurs éléments des lignes de courant avec les mesures. C'est toujours

l'élément stabilisé qui donne les meilleures corrélations.

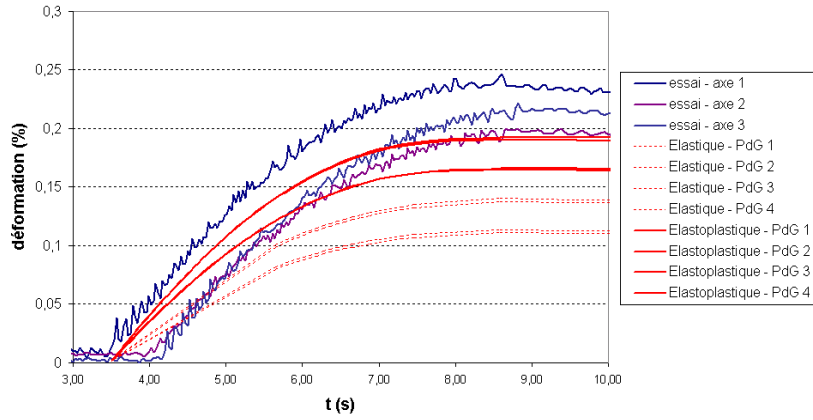


FIG. 3.67: Déformations principales pour la rosette n°1

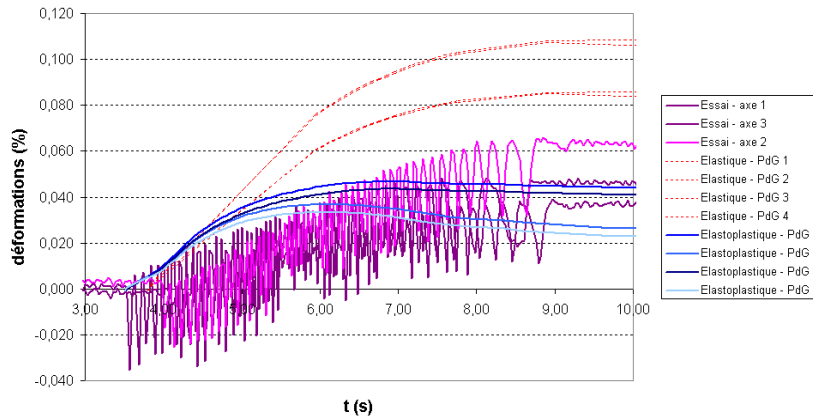


FIG. 3.68: Déformations principales pour la rosette n°3

A présent que les corrélations avec les jauges de déformation sont satisfaisantes, on étudie les champs mécaniques sur la piste de frottement. Les courbes (3.69), (3.70), (3.71) et (3.72) correspondent à la ligne de courant n°4, prise au milieu de la piste de frottement, sur le côté intérieur (*cf. figure 3.77*).

La courbe (3.69) donne les valeurs des contraintes circonférentielles ( $\sigma_{\theta\theta}$  dans un repère cylindrique) en fonction des déformations plastiques circonférentielles pour toute la ligne de courant, pendant le freinage et le refroidissement. La courbe (3.70) correspond aux mêmes valeurs, mais elle ne concerne que l'élément stabilisé. On ne commentera plus

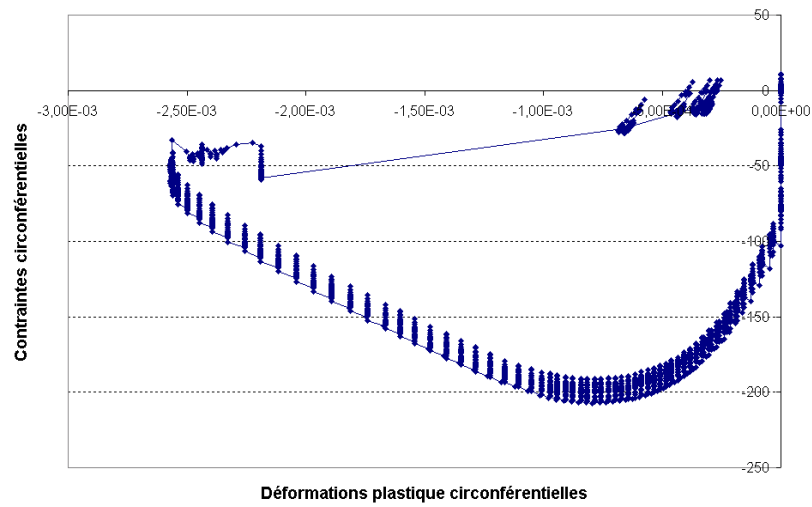


FIG. 3.69: Courbe contraintes/déformations plastiques pour la ligne de courant en surface

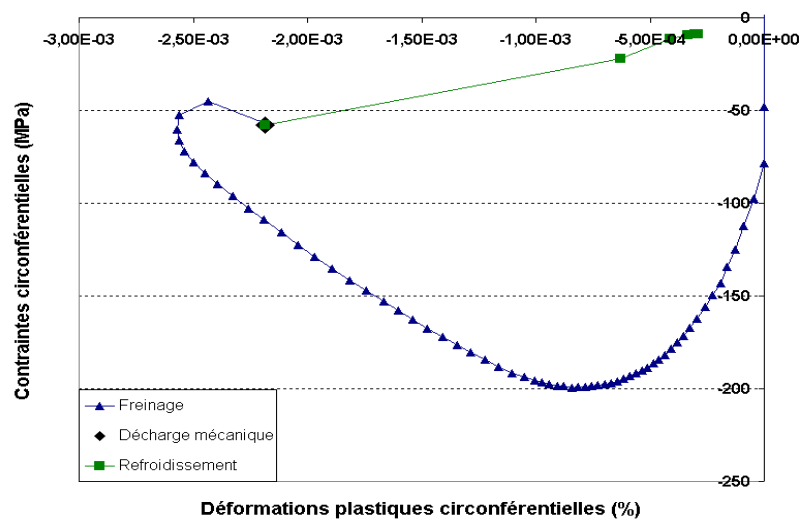


FIG. 3.70: Courbe contraintes/déformations plastiques pour l'élément stabilisé de la ligne de courant en surface

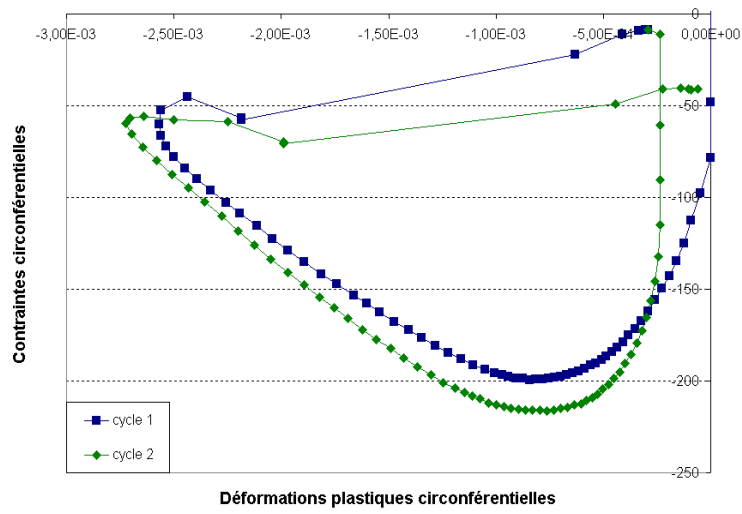


FIG. 3.71: Courbe contraintes/déformations plastiques en surface sur 2 cycles

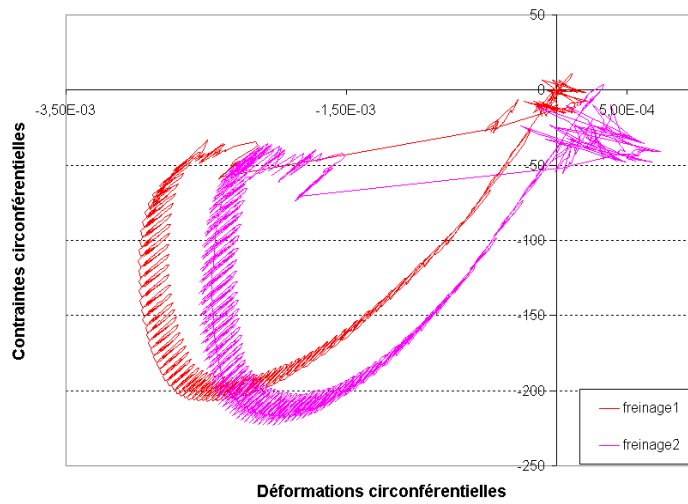


FIG. 3.72: Courbe contraintes/déformations mécaniques pour la ligne de courant en surface sur 2 cycles

que ces courbes "stabilisées" mais on garde à l'esprit qu'un élément de matière voit une histoire mécanique un peu plus complexe. La courbe peut se décomposer en plusieurs parties distinctes :

- Dans un premier temps, le disque chauffe en surface. Les pistes tendent alors à se dilater. Dans la direction circonférentielle, la matière ne peut pas s'étendre : il s'établit alors des contraintes de compression dans le disque. La sollicitation thermique reste faible et les déformations restent purement élastiques.
- La limite d'élasticité finit par être atteinte. On voit apparaître des déformations plastiques dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta\theta}$ . Les contraintes de compression continuent à augmenter.
- La température devient élevée et les coefficients commencent à baisser. De ce fait, les contraintes diminuent en amplitude mais les déformations plastiques continuent à augmenter (en valeurs négatives).
- Pendant les dernières secondes de freinage, la température commence à s'homogénéiser dans le disque : le cœur du disque devient presque aussi chaud que les pistes. Ces dernières sont alors moins contraintes. De plus, la température commence à diminuer. De ce fait, les contraintes diminuent aussi. Il y a même plastification en décharge, ce qui est une conséquence de l'écroutissage cinématique.
- La décharge mécanique n'a aucun effet. On confirme encore que le chargement mécanique a très peu d'influence sur les champs de contraintes au niveau des pistes, du moins pour ce type de freinage.
- Pendant la phase de refroidissement, les pistes redeviennent froides ; les contraintes de compression tendent alors à disparaître. On note toutefois que la décharge thermique n'est pas élastique.

Les contraintes résiduelles en cette ligne de courant restent des contraintes de compression. On effectue le calcul de deux freinages pour étudier l'évolution des champs résiduels. Les courbes (3.72) et (3.71) donnent les variations des contraintes circonférentielles en fonction des déformations totales mécaniques et des déformations plastiques. Les contraintes résiduelles tendent plutôt à baisser. On n'obtient toujours pas de contraintes de traction en fin de refroidissement. Cette constatation nous a amenés à nous interroger sur la modélisation du comportement de la fonte. En effet, d'après notre étude bibliographique, le comportement de la fonte à graphite lamellaire est différent selon que la structure travaille en traction ou en compression. Les limites d'élasticité en compression sont de l'ordre de 2 à 3 fois celles en traction. Ne disposant pas de données expérimentales en compression sur la fonte GLJ2, nous avons tout simplement multiplié par un facteur 2 les limites d'élasticité issues des identifications faites sur les essais de traction (*cf. partie 3.1.3*). Il s'agit d'étudier l'influence de ces limites d'élasticité sur la réponse mécanique du disque.

Les déformations totales calculées dans la gorge et qui correspondent aux rosettes restent très semblables à celles obtenues avec les limites en traction. Les courbes sont



données en annexes (*annexes ??*). Sur la courbe (3.73), on constate que les pistes plastifient plus tard, ce qui est logique puisque les limites d'élasticité sont plus élevées. Une autre conséquence est que la fin de la phase de freinage est élastique. Les contraintes résiduelles circonférentielles sont cette fois-ci des contraintes de traction. Ces calculs montrent l'importante influence de la limite d'élasticité sur la réponse mécanique du disque. Il est donc nécessaire d'effectuer des essais de caractérisation de comportement de la fonte en traction et en compression. S'il est communément admis que le comportement est différent en traction et en compression, il faut rappeler que les études jusqu'à présent faites sont basées sur des essais monotones. Il faudrait étudier la différence de comportement sur un cycle stabilisé (obtenu en général après une vingtaine de cycles). Si ces essais cycliques témoignent en effet d'une différence de comportement en traction et en compression, il faudrait alors le prendre en compte dans la modélisation de la fonte.

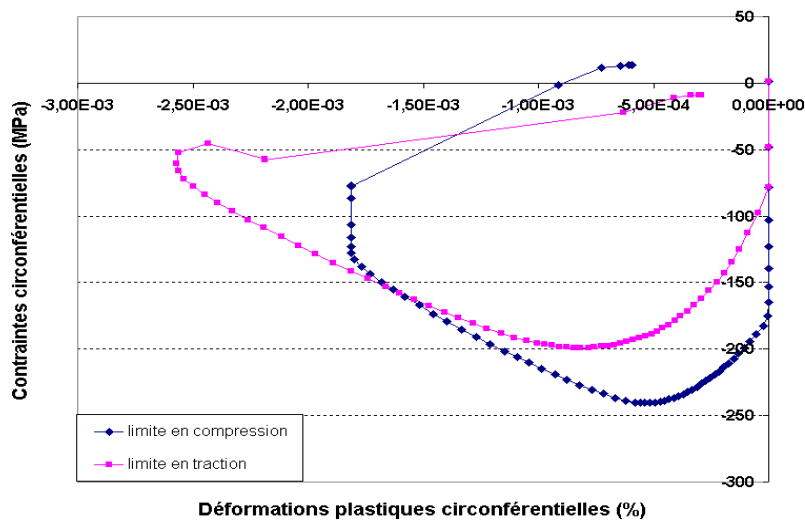


FIG. 3.73: Courbe contraintes/déformations plastiques avec des limites élastiques de compression

### Deuxième loi matériau

L'analyse des essais TRR a donné deux jeux de paramètres matériau différents, selon le critère d'erreur choisi. On étudie dans cette partie la seconde loi matériau. On ajoute une condition aux limites aux nœuds qui se trouvent au cœur des pistes (en milieu d'épaisseur), sur l'axe de symétrie des plaquettes de frein. On bloque en effet les déplacements dans la direction  $\mathbf{e}_y$  de ces nœuds pour rendre compte de la présence de l'étrier. Le disque ne peut pas se mettre totalement en cône puisqu'il est bloqué par l'étrier. Cette condition est toutefois un peu sévère car dans la réalité, l'étrier présente un peu de jeu.

Cette seconde loi donne des résultats au niveau de la gorge qui sont légèrement moins bons que la première loi. Les courbes se rapprochent plus de celles obtenues avec le calcul purement élastique. Les courbes sont données en annexes (*annexes ??*). Cinq freinages successifs ont été calculés.

Les figures (3.74) et (3.75) montrent que les courbes ne se stabilisent pas au bout de 5 cycles. Au contraire, la structure semble voir du rochet. Ce résultat n'est pas si surprenant car le freinage simulé correspond à un freinage sévère à décélération maximale à partir d'une vitesse maximale de rotation. La figure (3.76) donne la distribution des contraintes circonférentielles dans une section de disque. Le cœur du disque est plus en traction que la surface. La ligne de courant étudiée en surface comporte d'ailleurs des contraintes résiduelles de compression. Toutefois, on remarque que globalement, la résultante des contraintes sur la section est une contrainte de traction. Ce résultat reste en accord avec l'expérience : quand on découpe un disque utilisé selon une section, il s'ouvre. Cela témoigne de contraintes résiduelles de traction.

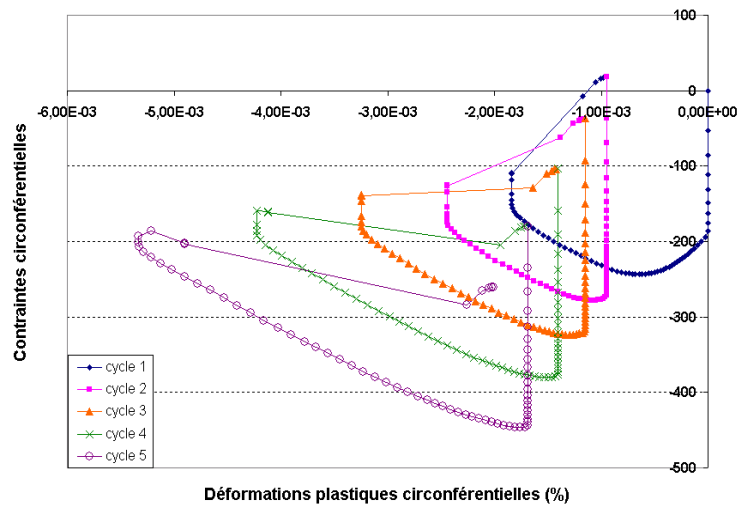


FIG. 3.74: Courbe contraintes/déformations plastiques en surface sur 5 cycles de freinage

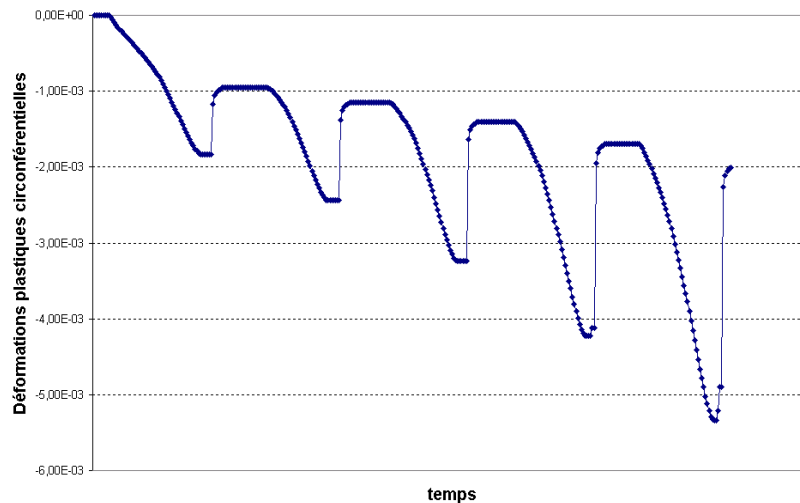


FIG. 3.75: Evolution des déformations plastiques en surface sur 5 cycles de freinage

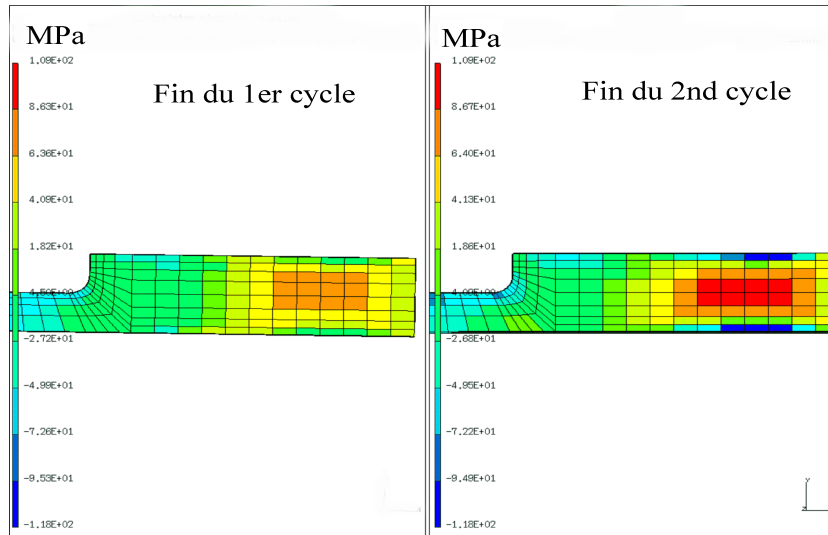


FIG. 3.76: Distribution des contraintes résiduelles circonférentielles sur une section de disque

La figure (3.77) permet d'étudier plus précisément les champs mécaniques dans la profondeur du disque. Elle permet de comprendre pourquoi les contraintes circonférentielles résiduelles sont positives dans le cœur du disque et négatives en surface. Pendant les premiers instants de freinage, le disque est plus chaud en surface. De ce fait, les contraintes de compression sont d'abord plus élevées que dans le cœur. La température atteint alors la valeur critique à partir de laquelle les coefficients s'effondrent ; par conséquent, les contraintes diminuent en valeur. Dans l'épaisseur, la température n'atteint pas cette valeur critique. L'évolution des contraintes circonférentielle reste donc monotone pendant toute la phase de freinage. A la fin du freinage, plus on est proche de la surface, plus les contraintes sont proches de la valeur nulle. Cela signifie que l'on part d'un état mécanique plus favorable à l'établissement de contraintes résiduelles de traction. Or c'est le contraire qui se passe : en surface, la température est supérieure à  $500^{\circ}\text{C}$ , la limite d'élasticité et le coefficient d'écrouissage sont donc faibles. On plastifie donc pendant le refroidissement et comme la pente d'écrouissage est faible, les contraintes varient peu. En profondeur, le refroidissement n'engendre pas de plastification ; les contraintes montent alors fortement en traction (de l'ordre de  $75\text{ MPa}$  pour le premier cycle). La courbe (3.78) permet de suivre l'évolution de la température des lignes de courant étudiée. Un calcul a été effectué avec des coefficients ne variant plus avec la température. Les valeurs prises sont celles qui correspondent à une température égale à  $20^{\circ}\text{C}$ . Les résultats (figure 3.79) confirment que les différences de comportement selon l'épaisseur lors du refroidissement sont uniquement dues à la loi matériau.

Enfin, on étudie une ligne de courant sur la couronne extérieure du disque, en milieu d'épaisseur (ligne de courant n°5 sur la figure 3.77). En début de freinage, les extrémités supérieure et inférieure de la couronne sont plus chaudes que le cœur. Elles se dilatent et engendrent des contraintes de traction en milieu d'épaisseur (figure 3.80). Quand la profondeur du disque commence aussi à se dilater, les contraintes se transforment en contraintes de compression. La couronne extérieure finit aussi par plastifier. Enfin, le refroidissement

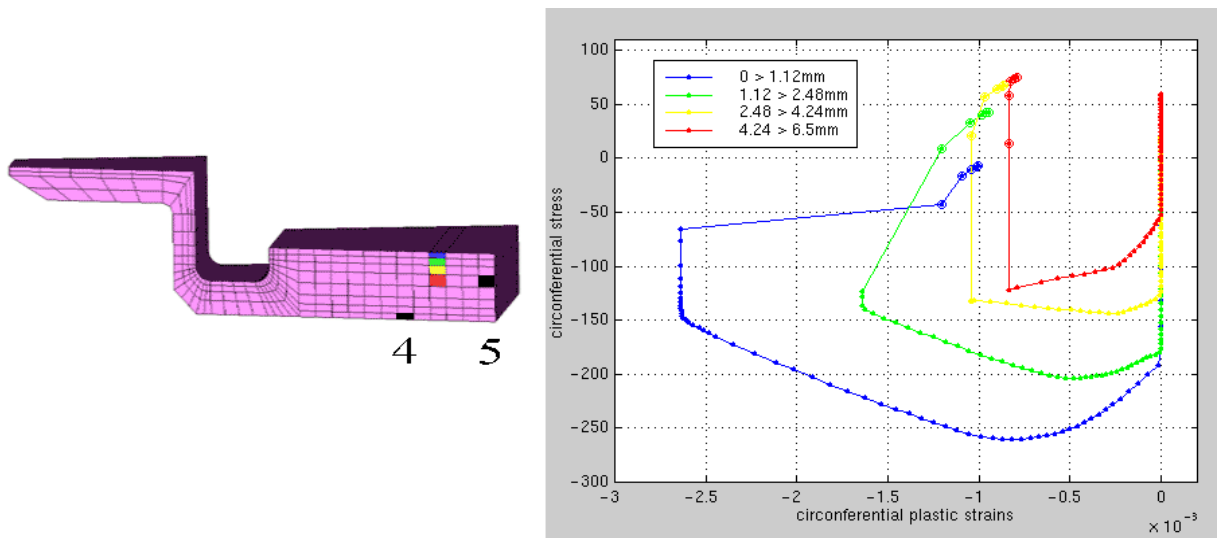


FIG. 3.77: Courbe contraintes/déformations plastiques en fonction de la profondeur

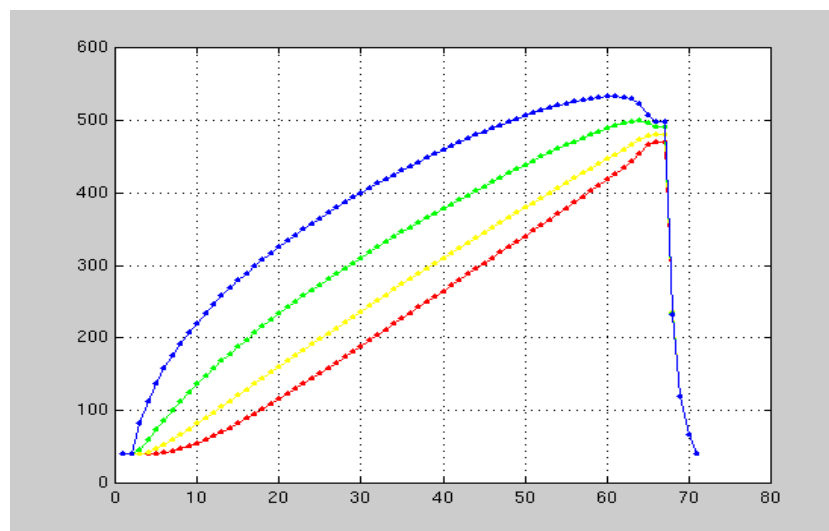


FIG. 3.78: Evolution de la température pendant un cycle en fonction de la profondeur

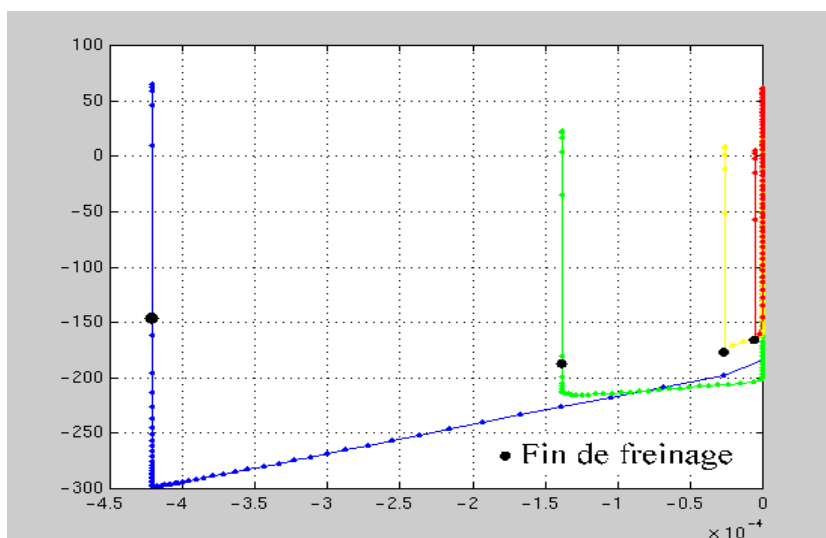


FIG. 3.79: Courbes relatives à des coefficients matériau ne dépendant pas de la température en fonction de la profondeur

est élastique. Le second cycle se déroule exactement de la même manière. Mais comme les contraintes résiduelles de traction sont de plus en plus élevées, au troisième cycle, pendant la phase de traction, la limite élastique est atteinte ; on a donc de la plastification. Les résultats sur cette ligne de courant sont cohérents avec l'expérience. En effet, les fissures radiales observées sur les pistes de frottement démarrent en général sur la couronne extérieure du disque. Les résultats numériques montrent bien que les contraintes résiduelles sont plus élevées sur la couronne extérieure que sur les pistes de frottement ou en profondeur. Les contraintes résiduelles obtenues sont relativement élevées ; on peut s'attendre à ce qu'au bout de peu de cycles, le disque rompt en ce point. Les essais sur banc montrent d'ailleurs qu'avec de telles sollicitations, la durée de vie du disque est faible.

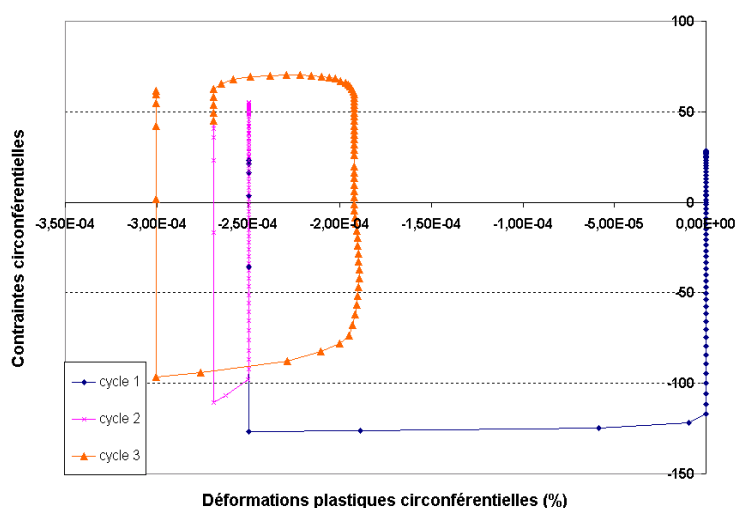


FIG. 3.80: Courbe contraintes/déformations plastiques sur la couronne extérieure du disque sur 3 cycles

### 3.2.5.5 Conclusions sur l'analyse thermomécanique

Les résultats montrent que la méthode numérique mise en place permet de prédire correctement le comportement du disque au niveau de la gorge ; les corrélations avec les jauges de déformations sont bonnes. La simulation tridimensionnelle avec prise en compte de la rotation du disque (rendue possible grâce à l'utilisation des algorithmes eulériens) permet aussi d'analyser la réponse mécanique du disque dans les pistes de frottement, là où peuvent apparaître des fissures radiales. L'analyse des courbes permet de montrer que les contraintes résiduelles sont globalement des contraintes de traction circonférentielles sur chaque section du disque. Le maximum est toutefois atteint sur la couronne extérieure, là où démarrent expérimentalement les fissures. Le cycle imposé est un freinage sévère. Il n'est donc pas étonnant de ne pas voir de stabilisation de la réponse du disque.

La dernière conclusion que l'on peut tirer de cette analyse porte sur la très grande sensibilité des résultats par rapport à la modélisation du comportement. En effet, la prise en compte de la différence de limite d'élasticité en traction et en compression modifie fortement les niveaux de contraintes atteints en fin de chaque cycle. Des essais de traction et de compression répétés doivent cependant être effectués pour vérifier ce comportement commun aux fontes car si celui-ci a été observé par plusieurs auteurs, jamais il n'a été vérifié sur un cycle stabilisé. Enfin, les autres coefficients nécessitent également une identification fine et robuste. Il semblerait que des efforts de méthodologie restent à faire dans ce domaine.

Finalement, les calculs présentés montrent la très grande sensibilité des résultats par rapport aux valeurs de température atteintes, aux effets de structure et au comportement du matériau. Il est donc essentiel, dans un premier temps, de bien estimer l'histoire thermique du disque. L'algorithme TRC (Transitoire dans le Repère du Chargement) permet une bonne prédiction des champs de température dans la pièce. Les effets de structure ont pu être modélisés grâce à l'utilisation des algorithmes eulériens mis en place. Ces derniers permettent également un gain de temps de calcul qui rend possible la modélisation du comportement anélastique du matériau. Enfin, il reste à bien définir les conditions aux limites du problème et d'identifier d'une façon suffisamment fine et robuste le comportement de la fonte.

### 3.2.6 Etude de l'endommagement

L'objectif de cette partie est d'illustrer la démarche d'étude d'endommagement. Cette analyse repose sur les freinages d'arrêt à 80 bars et 30 bars présentés précédemment, qui ne sont pas forcément représentatifs de la vie d'un disque. On ne pourra donc pas conclure sur la tenue des disques, mais seulement sur la pertinence des méthodes utilisées et des critères associés.

Dans la partie (3.1.4), nous avons souligné l'importance de disposer d'un critère de fatigue qui prenne en compte les caractères multiaxial et anisotherme du chargement. Nous avons ainsi proposé une extension anisotherme du critère de Dang Van. Il s'agit de comparer les résultats obtenus par ce critère anisotherme avec ceux obtenus par le critère isotherme classique de Dang Van. Nous rappelons que ces critères de fatigue polycyclique reposent sur une démarche macro-méso. La condition d'endurance illimitée en un point  $m$  sur un cycle de contraintes s'écrit sous la forme :

$$h(\boldsymbol{\sigma}(m, t), t \in [0, T]) < 0$$

Les observations expérimentales montrent les rôles prépondérants du cisaillement et de la pression hydrostatique sur le comportement en fatigue. La fonction  $h$  correspondant à l'une des versions du critère de Dang Van est :

$$\min_{\mathbf{S}^T} \{ \max_t \| \tau[\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^T] \| \} - b_d + a_d \mathcal{P}_{max} < 0$$

où  $a_d(T)$  et  $b_d(T)$  sont des fonctions caractéristiques du matériau.  $\tau$  est le cisaillement maximal,  $\mathcal{P}_{max}$  la pression hydrostatique et  $\mathbf{S}$  le déviateur des contraintes. La fonction  $h$  correspondant au critère anisotherme proposé (3.12) est :

$$\min_{\mathbf{S}^T} \left\{ \max_t \left[ \frac{\| \tau[\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^T] \|}{\beta_d(T(t))} - 1 \right] \right\} + \max_t \{ \alpha_d(T(t)) P(t) \} < 0$$

où  $\alpha_d(T)$  et  $\beta_d(T)$  sont des fonctions caractéristiques du matériau.

Les critères isothermes et anisothermes sont appliqués aux cycles de contraintes et de température issus des calculs thermomécaniques présentés dans la partie (3.2.5). Nous étudions quelques lignes de courant particulières. Elles sont représentées sur le schéma (3.81). Les coefficients du critère sont déterminés par des essais de fatigue sur éprouvettes, effectués à différentes températures (20°C, 400°C et 600°C).

Sur la figure (3.82), on a représenté, pour le freinage à 80 bars, le trajet  $(\tau, p)$  de deux points localisés dans la zone de raccordement du disque, ainsi que les droites de Dang Van à 20°C et 600°C. On s'aperçoit que le critère à 600°C est bien sûr plus sévère que celui à 20°C. Néanmoins, quelle que soit la droite de Dang Van, les résultats montrent que les critères sont dépassés pour la ligne de courant n°2. Ce résultat était attendu, puisque le freinage simulé correspond à un freinage sévère, non représentatif des freinages quotidiens qui peuvent mener à de la fatigue polycyclique. Il est donc logique que le critère

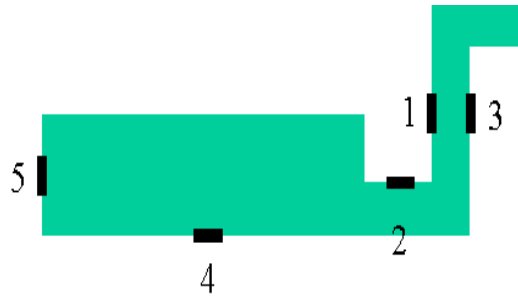


FIG. 3.81: Position des lignes de courant postraitées

polycyclique soit dépassé. Le maximum de la fonction  $h$  est atteint dans cette zone de raccordement qui correspond bien à la zone critique du disque. En effet, ce dernier peut rompre dans la gorge, quand il est sévèrement sollicité pendant un petit nombre de cycles.

Les lignes de courant sur les pistes de frottement (sur le côté intérieur et sur la couronne extérieure) ont des trajets de chargement "moins endommageants". En effet, sur la figure (3.83), on voit que la droite de Dang Van à  $20^{\circ}\text{C}$  n'est jamais dépassée, tandis que celle à  $600^{\circ}\text{C}$  l'est légèrement. Le diagramme (3.84) donne la valeur maximale sur le cycle de la fonction  $h$  du critère anisotherme. On la compare avec celles qui correspondent à des coefficients pris à une température fixe. Cela revient à comparer le critère anisotherme au critère isotherme de Dang Van évalué à une température fixe. Les résultats montrent que le critère anisotherme permet de définir une limite d'endurance intermédiaire entre les deux critères isothermes à  $20^{\circ}\text{C}$  et  $600^{\circ}\text{C}$ . En revanche, le critère anisotherme est tantôt plus sévère, tantôt moins sévère que le critère isotherme évalué à  $400^{\circ}\text{C}$ .

Enfin, les résultats obtenus avec le freinage à 30 bars sont représentés dans les figures (3.85) et (3.86). Ils montrent que ce freinage est moins sévère que celui à 80 bars, notamment pour la ligne de courant n°5 : quel que soit le critère utilisé, la limite d'endurance n'est jamais dépassée en ce point, alors que pour le freinage à 80 bars, la limite isotherme à  $600^{\circ}\text{C}$  est dépassée. Ce phénomène s'explique par le fait qu'à 80 bars, le flux de chaleur imposé est plus élevé. De ce fait, il y a plus de gradient thermique selon l'épaisseur du disque. La ligne de courant n°5 est donc plus sollicitée. Enfin, si on se fie aux résultats obtenus avec le critère anisotherme sur toutes les lignes de courant, le freinage à 30 bars n'induit pas de fissure par fatigue polycyclique, car le critère n'est jamais dépassé. L'expérience montre que le disque plein étudié ne fissure effectivement pas en clientèle. Or le freinage à 30 bars est un freinage qui semble assez représentatif d'un freinage quotidien.

On peut conclure que les résultats sont qualitativement corrects :

- les zones critiques sont bien celles qui ont les valeurs de  $h$  les plus élevées ;
- le freinage à 80 bars induit plus de points critiques que le freinage à 30 bars ;
- les sévérités des critères isothermes sont croissantes quand la température de référence augmente ;



- le critère anisotherme permet bien de définir une limite d'endurance intermédiaire entre les critères isothermes évalués à  $20^{\circ}C$  et  $600^{\circ}C$ .

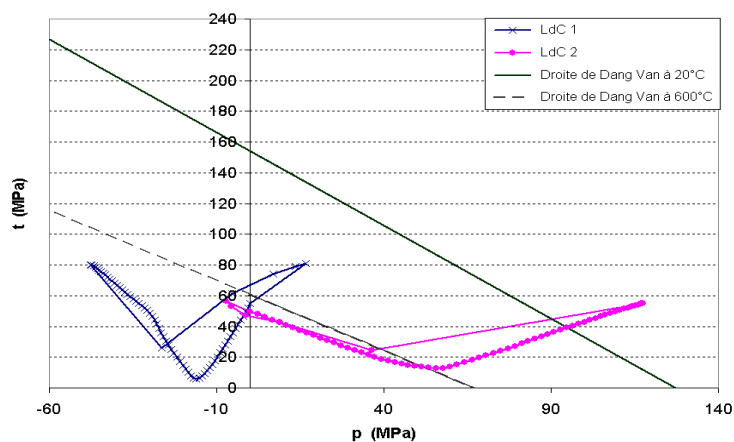


FIG. 3.82: Diagramme  $(\tau, p)$  dans la gorge pour le freinage à 80 *bars*

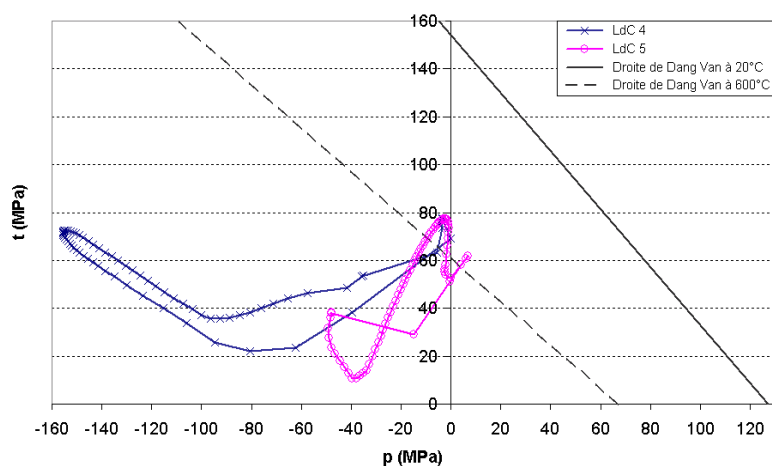


FIG. 3.83: Diagramme  $(\tau, p)$  sur les pistes de frottement pour le freinage à 80 *bars*

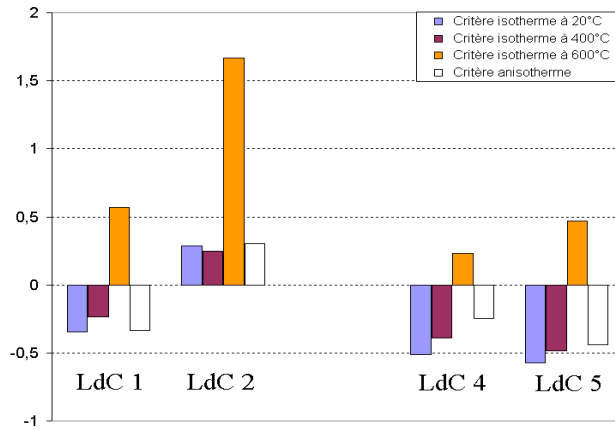


FIG. 3.84: Valeurs de la fonction  $h$  pour le freinage à 80 bars

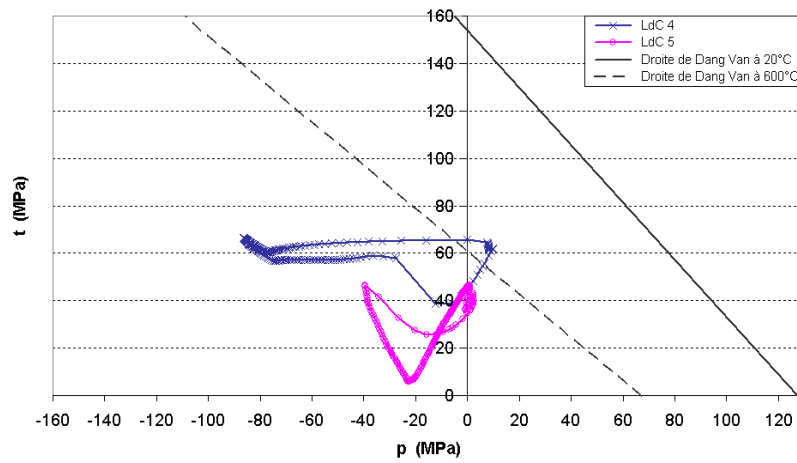


FIG. 3.85: Diagramme  $(\tau, p)$  sur les pistes de frottement pour le freinage à 30 bars

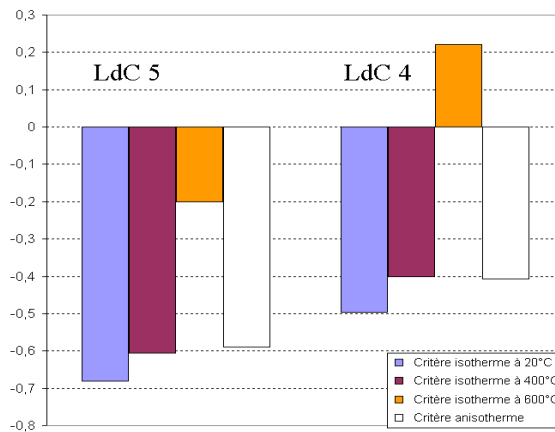


FIG. 3.86: Valeurs de la fonction  $h$  pour le freinage à 30 bars



# Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail était de proposer une modélisation du comportement thermomécanique des disques de frein, ainsi qu'une méthode de dimensionnement aux phénomènes de fatigue. Cette dernière comporte les étapes suivantes :

- la connaissance et la modélisation des chargements et des conditions aux limites imposés au disque ;
- la modélisation et l'identification du comportement du matériau (fonte à graphite lamellaire) ;
- le calcul prédictif de la pièce dans un contexte de bureau d'étude ;
- l'étude des endommagements, la formulation et l'application des critères de fatigue associés.

La connaissance des chargements et des échanges entre le disque et son environnement nécessite une analyse préalable des observations expérimentales. Celle-ci permet de dégager les principaux phénomènes physiques mis en jeu au cours d'un freinage. La stratégie de modélisation numérique repose sur les conclusions de cette analyse. Enfin, l'étude des sollicitations en clientèle permet de déterminer le profil de vie d'un disque. Cette seconde partie de l'analyse des sollicitations n'a pas été abordée dans ce travail.

La modélisation du matériau doit tenir compte du comportement anélastique de la fonte dans un contexte de températures variables et élevées. De plus, le modèle doit être représentatif de la vie du disque : l'identification du comportement doit donc s'effectuer dans un contexte semblable à celui vécu par la pièce (même gamme de température, même vitesse de déformation, etc.) sur un cycle stabilisé.

Pour être prédictif, le calcul du disque doit respecter la complexité du système (problème tridimensionnel, rotation du disque, comportement anélastique du matériau, sollicitations anisothermes, etc.) mais pour être compatible avec les contraintes des bureaux d'étude, les temps de calcul doivent rester raisonnables. Pour répondre à ces besoins, de nouveaux algorithmes eulériens (transitoire, stationnaire, périodique) ont été développés. Ils permettent la simulation tridimensionnelle transitoire d'un freinage en des temps de calcul compatibles avec les exigences des ingénieurs.

Enfin, l'étude des endommagements subis par le disque de frein doit tenir compte du contexte multiaxial et anisotherme des phénomènes. L'analyse des avaries observées sur les disques de frein a permis d'identifier deux principaux types d'endommagement : la fatigue à faible nombre de cycles et la fatigue à grand nombre de cycles. Un critère énergétique, proposé par Charkaluk et déjà appliqué à des structures réelles, permet de répondre au problème de fatigue oligocyclique. Pour la fatigue polycyclique, une extension anisotherme du critère de Dang Van a été proposée. Un premier calcul de fatigue a montré l'apport de ce critère.

L'objectif de ce travail était de fournir, pour l'étude de la tenue en service des disques de frein, des outils théoriques et numériques utilisables en bureaux d'étude. L'exemple du calcul thermomécanique du disque plein présenté dans le dernier chapitre montre que les algorithmes eulériens développés permettent une bonne modélisation du système, avec des gains de temps de calcul conséquents. L'étude complète du freinage peut donc être abordée.

D'un point de vue industriel, il reste à effectuer une analyse des cycles de freinage en clientèle afin de dégager un profil de vie du disque et de définir un ou quelques cycles représentatifs de la durée de vie. De même, l'étude des essais sur pièces devra permettre d'établir, pour chaque type d'endommagement, quel type de chargement l'a induit.

Pour la modélisation du comportement du matériau, il reste quelques incertitudes. A-t-on une différence de comportement en traction et en compression lorsque la réponse stabilisée est atteinte ? Comment départager deux jeux de paramètres issus de deux identifications différentes ? Quel est le calcul d'erreur le plus pertinent ? Des essais anisothermes sur éprouvettes lèveraient-ils les incertitudes ? Enfin, les calculs de disque présentés dans ce mémoire reposent sur un modèle de comportement élastoplastique simple. Il reste à appliquer le modèle élastoviscoplastique, présenté dans le chapitre 2 et testé sur des modèles simples, au calcul du disque de frein.

Les algorithmes développés permettent des simulations numériques qui prennent bien en compte les effets tridimensionnels de structure, la rotation du disque et le caractère transitoire de l'histoire thermomécanique vécue par la pièce. En revanche, une étude numérique plus approfondie des couplages entre les phénomènes thermomécaniques et le contact frottant entre le disque et les plaquettes permettrait de mieux modéliser les chargements. Les problèmes d'usure, de flambement ou de points chauds n'ont pas été abordés, car il faudrait d'abord déterminer leur occurrence et leur rôle dans la tenue en fatigue des disques. Les freinages longs (type descente de montagne) n'ont pas été étudiés.

Les critères de fatigue oligocyclique et polycyclique anisothermes semblent bien répondre aux besoins du problème du disque de frein. Le critère énergétique a déjà été appliqué à d'autres structures. Pour la fatigue polycyclique, des essais sur banc et sur véhicule permettront de valider le critère anisotherme proposé.

# Annexe A

## Calculs de contact du disque de frein

### A.0.7 Influence du module de Young des garnitures des plaquettes

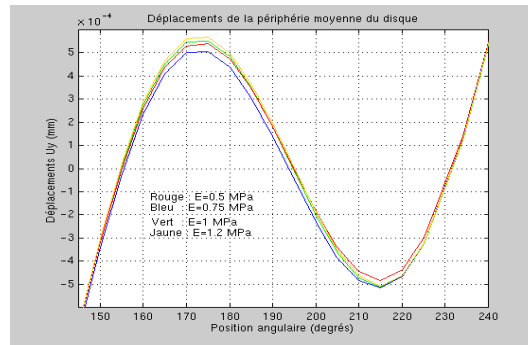


FIG. A.1: Influence du module de Young des garnitures sur le déplacement d'un point sur la couronne extérieure du disque

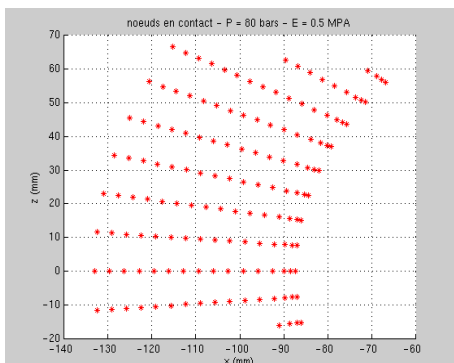


FIG. A.2: Nœuds en contact pour  $E_{\text{plaquette}} = 0,5 \text{ GPa}$

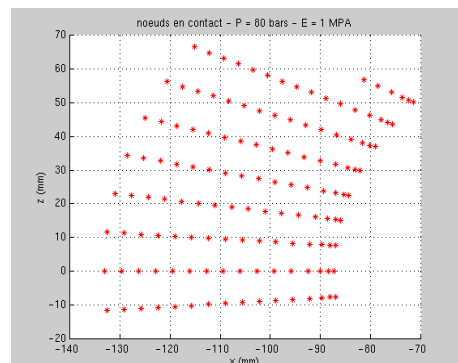


FIG. A.3: Nœuds en contact pour  $E_{\text{plaquette}} = 1 \text{ GPa}$

## A.0.8 Influence du coefficient de frottement

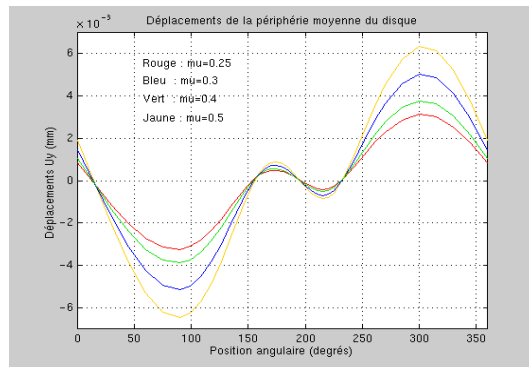


FIG. A.4: Influence du coefficient de frottement  $\mu$  sur le déplacement

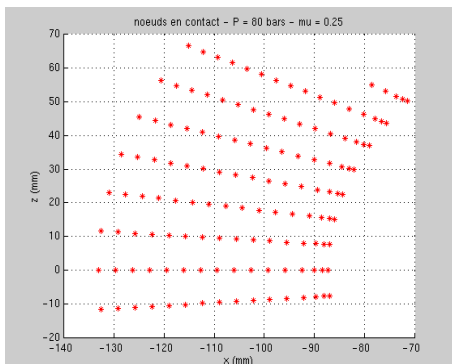


FIG. A.5: Nœuds en contact pour un coefficient de frottement  $\mu = 0,25$

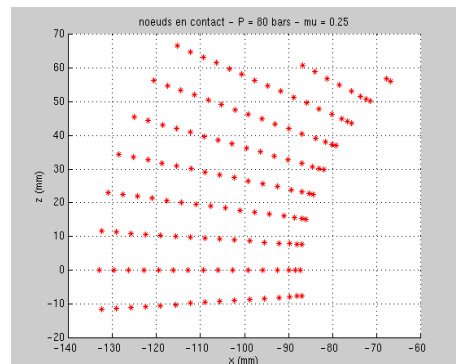


FIG. A.6: Nœuds en contact pour un coefficient de frottement  $\mu = 0,4$

## Annexe B

### Calculs thermiques du disque de frein

#### B.0.9 Distribution du flux de chaleur en fonction du rayon

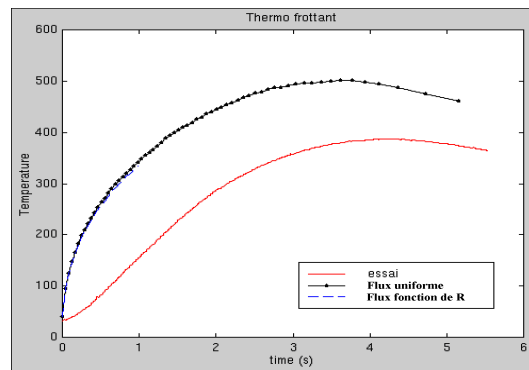


FIG. B.1: Comparaison de température au niveau du thermocouple frottant pour une distribution de flux de chaleur en fonction de la position radiale des points

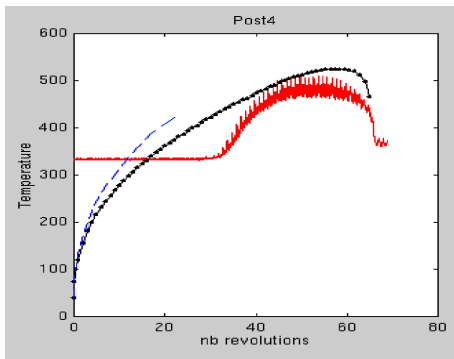


FIG. B.2: Comparaison de température au niveau du pyromètre *POST 4*

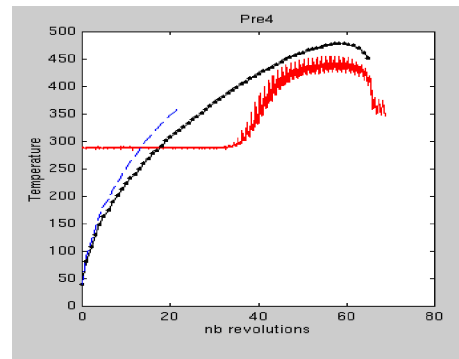


FIG. B.3: Comparaison de température au niveau du pyromètre *PRE 4*



## B.0.10 Distribution du flux de chaleur en fonction de la pression et du rayon

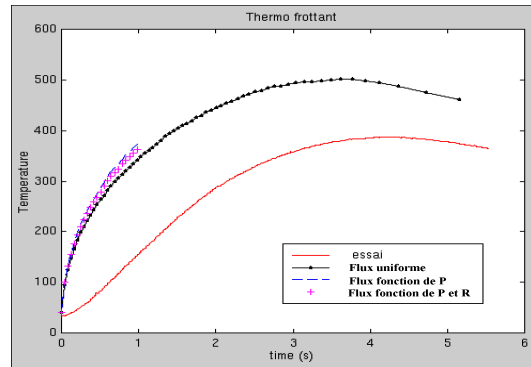


FIG. B.4: Comparaison de température au niveau du thermocouple frottant pour une distribution de flux de chaleur en fonction de celle de la pression de contact et de la position radiale des points

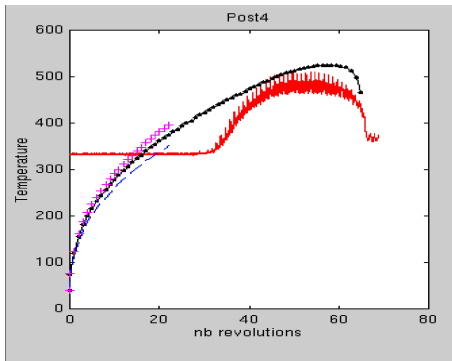


FIG. B.5: Comparaison de température au niveau du pyromètre *POST 4*

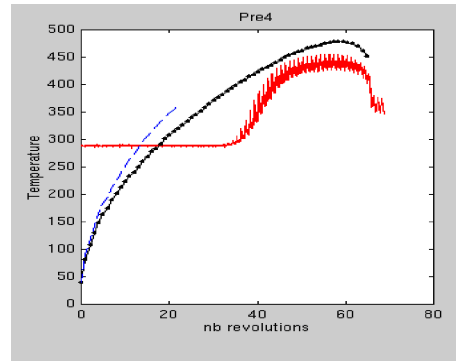


FIG. B.6: Comparaison de température au niveau du pyromètre *PRE 4*

### B.0.11 Calcul thermique du freinage à 30 bars

Les résultats suivants sont relatifs à un calcul thermique effectué avec l'algorithme TRC, simulant le freinage d'arrêt à partir d'une vitesse initiale  $V = 150 \text{ km/h}$  avec une pression hydraulique  $P = 30 \text{ bars}$ . Ce freinage correspond au freinage numéro (b) des tableaux (3.2.2.3) et (3.14) du chapitre (3.2.2) qui définissent les freinages réalisés sur banc dynamométrique. Dans ces calculs, la distribution du flux de chaleur est proportionnelle à la pression de contact.

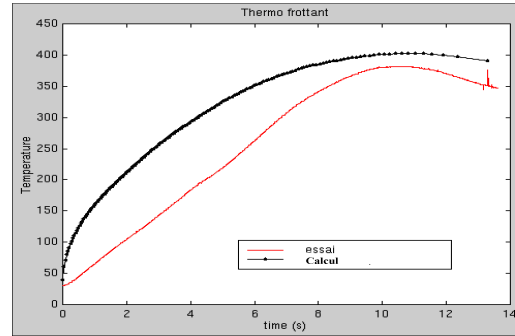


FIG. B.7: Comparaison de température au niveau du thermocouple frottant

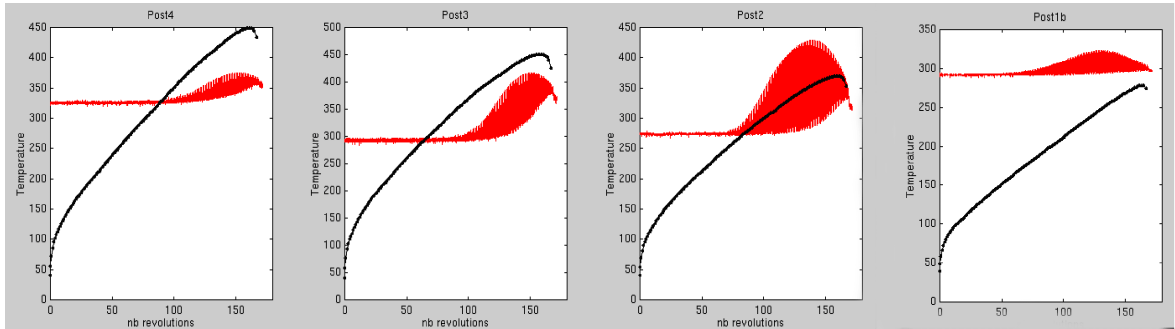


FIG. B.8: Comparaison de température au niveau des pyromètres placés après les plaquettes

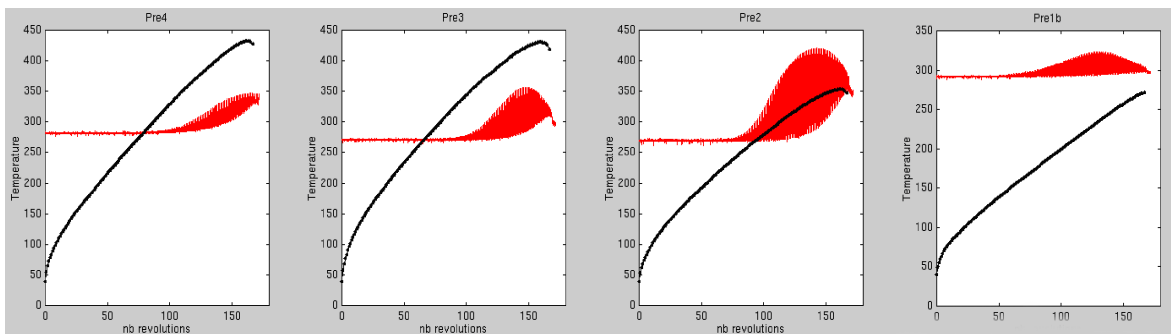


FIG. B.9: Comparaison de température au niveau des pyromètres placés avant les plaquettes

## Annexe C

# Calculs mécaniques du disque de frein

### C.0.12 Loi de comportement $n^o1$

Les corrélations calculs/essais pour le freinage numéro (c) du tableau (3.2.2.3) sont effectuées pour un calcul thermomécanique du disque de frein avec la première loi. On rappelle que cette loi élastoplastique provient d'une identification des paramètres qui repose sur une erreur calculée sur le niveau des contraintes et sur la quantité d'énergie dissipée. On a artificiellement multiplié par un facteur 2 les limites d'élasticité pour étudier l'influence d'une éventuelle différence de comportement en traction/compression. La courbe correspondant aux déformations principales de la rosette  $n^o1$  selon la première direction est donnée.

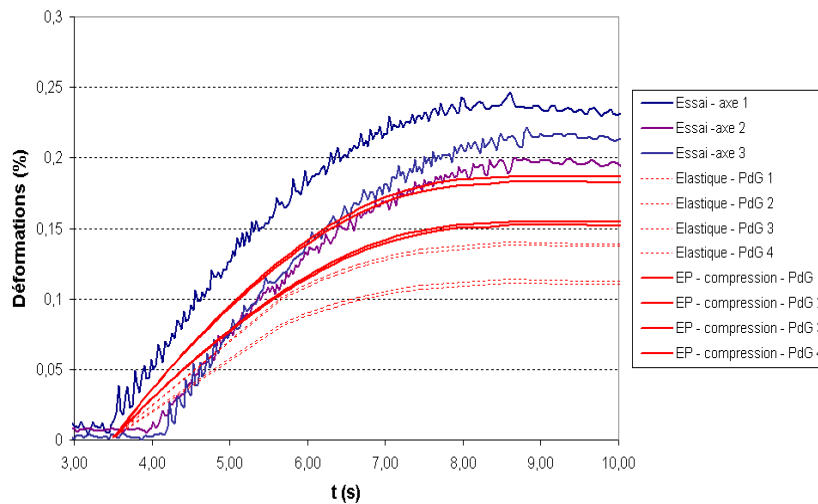


FIG. C.1: Déformations principales de la jauge 1

### C.0.13 Loi de comportement $n^o2$

La seconde loi élastoplastique provient d'une identification des paramètres qui repose sur une erreur calculée uniquement sur le niveau des contraintes. La courbe correspondant aux déformations principales de la rosette  $n^o3$  selon la deuxième direction est donnée.

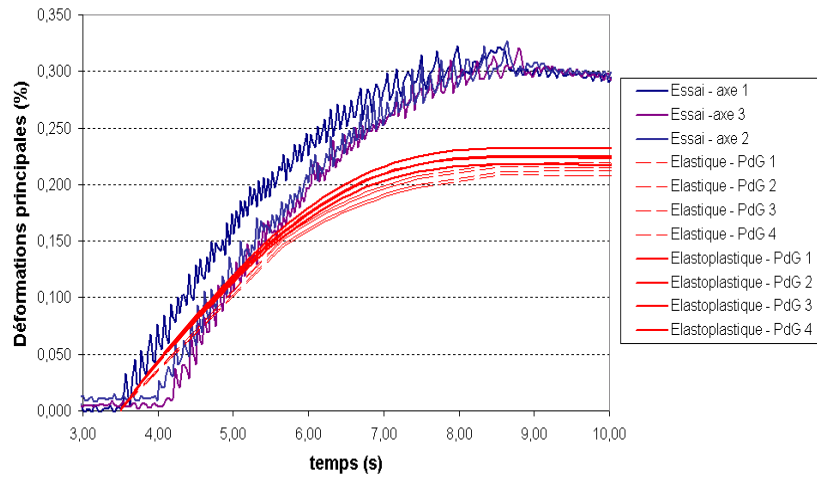


FIG. C.2: Déformations principales de la jauge 3

## Annexe D

# Application du critère de fatigue polycyclique anisotherme à une sphère composite

On considère une structure sphérique, composée d'une partie extérieure concentrique ( $r_i < r < r_e$ ) et d'une partie intérieure concentrique ( $0 < r < r_i$ ) (*figure D.1*). Le volume extérieur est en acier ; l'intérieur est en céramique. La sphère est soumise à des cycles sinusoïdaux uniformes de température de la forme :

$$T(t) = 20^\circ C + 225^\circ C (1 + \sin t)$$

On suppose que les matériaux sont homogènes et isotropes et que la structure subit des petites déformations. On s'intéresse au volume extérieur de la sphère. La solution élastique du problème est connue. Pour le volume extérieur, on a :

$$\text{où : } \begin{cases} \sigma_{rr}(r) &= \frac{pa}{1-a} \left( 1 - \left( \frac{r_e}{r} \right)^3 \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= \frac{pa}{1-a} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{r_e}{r} \right)^3 \right) \\ \sigma_{\phi\phi}(r) &= \sigma_{\theta\theta}(r) \\ a &= \left( \frac{r_i}{r_e} \right)^3 \\ b &= \left( \frac{E_e}{1-\nu_e} \right) \left( \frac{1-2\nu_e}{E_e} - \frac{1-2\nu_i}{E_i} \right) \\ p &= (1-a)(\alpha_i - \alpha_e) \frac{2E_e}{3(1-\nu_e)} \frac{\Delta T}{1 - \frac{2b}{3}(1-a)} \\ \sigma_{\phi\phi}(r) &= \sigma_{\theta\theta}(r) \end{cases}$$

Les valeurs des rayons  $r_i$  et  $r_e$  sont :

$$r_i = 100 \text{ mm}$$

$$r_e = 200 \text{ mm}$$

Les modules de Young ( $E_i$  et  $E_e$ ), les coefficients de poisson ( $\nu_i$  et  $\nu_e$ ), les coefficients de dilatation ( $\alpha_i$  et  $\alpha_e$ ) relatifs aux deux matériaux, ainsi que les limites d'endurance en flexion et torsion alternées ( $f_e$  et  $t_e$ ) de l'acier sont donnés dans les tableaux suivants.

	acier	céramique
Module de Young (GPa)	$E_e = 220$	$E_i = 290$
Coefficient de poisson	$\nu_e = 0,3$	$\nu_i = 0,27$
Coefficient de dilatation ( $K^{-1}$ )	$\alpha_e = 12 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_i = 3,1 \cdot 10^{-6}$

Température	20�C	200�C	400�C
$f_e$ (MPa)	312	217	225,7
$t_e$ (MPa)	200	173,8	144,8

Les valeurs de la fonction  $h$  correspondant au critère de fatigue polycyclique anisotherme proposé et décrit dans le chapitre (3.1.4) sont données en fonction du rayon  $r \in [r_i, r_e]$  (figure D.2). On les compare avec les valeurs des fonctions  $h$  qui correspondent aux critères isothermes de Dang Van, évalués avec les limites d'endurance à 20 C et 470 C. Ces températures sont les valeurs minimales et maximales du cycle thermique imposé. On ne dispose malheureusement pas de résultats expérimentaux concernant cette sphère composite. Cependant, les résultats des calculs sont qualitativement bons. En effet, on voit que le critère anisotherme donne une estimation de la tenue de la sphère dont la sévérité est encadrée par celles des critères isothermes pris à température minimale et maximale.

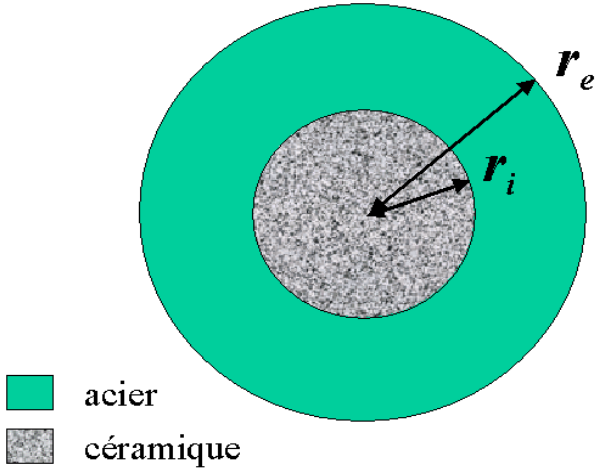


FIG. D.1: Sphère composite

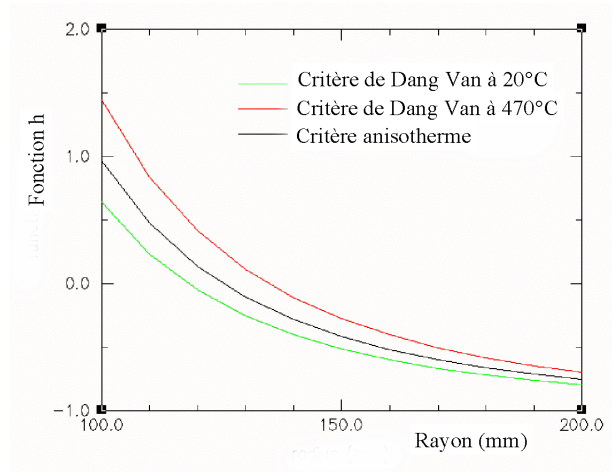


FIG. D.2: Valeurs de la fonction  $h$  pour le volume extérieur

# Bibliographie

- [1] ABDI R.E., SAMROUT H. : *"Effet de la distribution du flux dans un disque de frein sous sollicitations thermomécaniques"*, Mécanique industrielle et Matériaux, vol.52, n°1, 1999
- [2] ABENDROTH H. : *"A new approach to brake testing"*, SAE, 850080, 1999
- [3] ANDERSON A.E., KNAPP R.A. : *"Hot spotting in automotive friction systems"*, Wear, vol.135, pp.319-337, 1990
- [4] ASKES H. : *"Mesh adaptivity methods : the ALE technique for localisation"*, TU Delft - Faculty of Civil Engineering, Mechanics & Structures Computational Mechanics, march 1997
- [5] BAILEY T.P., BUCKINGHAM J.T., D'CRUZ A.H. : *"Development of thermal imaging and finite element techniques for optimization of brake disc design"*, EA EC - 11/13, 1991
- [6] BALLARD P., DANG VAN K., DEPERROIS A., PAPADOPOULOS I.V. : *"High cycle fatigue and finite element analysis"*, Fatigue and Fracture of Eng. Mat. & Struct 18, 4, pp.397-411, 1995
- [7] BARBER J.R. : *"Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids"*, Proc. Roy. Soc., vol.A312, pp.381-394, 1969
- [8] BOISSE P., LADEVÈZE P., ROUGE P. : *"A large time increment method for elastoplastic problem"*, Eur. J. of Mech., A/Solids, 8(4), pp. 257-275, 1989
- [9] BONNET-BENDHIA A.S., LUNEVILLE E. : *"Résolution numérique des équations aux dérivées partielles"*, cours MA212, ENSTA, 1993
- [10] BRICOUT J.P., WATREMEZ M., GUÉRIN J.D. : *"Optimisation des freins du train à grande vitesse par de nouveaux matériaux céramiques"*, L'industrie céramique et verrière n°927 6-7/97, pp.428-434, 1997
- [11] BRUNNER H., AUGSBURG K., GROCHOWICZ J. : *"Studying brake judder in floating caliper brakes for passenger cars"*, ATZ Automobiltechnische Zeitschrift 101, pp.22-30, 1999
- [12] BURTON R.A., NERLIKAR V., KILAPARTI S.R. : *"Thermoelastic instability in a seal-like configuration"*, Wear, vol.24, pp.177-188, 1973
- [13] CARNEIRO E.A., WINOCQ L., BERTHAUD J. : *"Disc brakes of trucks : a technical innovation for heavy vehicles"*, Warrendale SAE, 1992
- [14] CHABOCHE J.L., POLICELLA H., HACZMAREK H. : *"Applicability of the SRP method and creep-fatigue approach to the LCHTF life prediction of in-100 alloy"*, Aalborg (Danemark), 1978



- [15] CHABOCHE J.L., HACZMAREK H., RAINE P. : *"Sur les effets d'interaction de l'écroutissage et de l'endommagement dans l'acier 316L"*, Recherche Aérospatiale, (3) , pp.177-196, 1980
- [16] CHARKALUK E. : *"Dimensionnement des structures à la fatigue thermomécanique"*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, Spécialité Mécanique, 1999
- [17] CHARKALUK E., NGUYEN-TAJAN M.L., THOMAS J.J. : *"Thermomechanical design in the automotive industry "*, 2000 Abaqus Users' Conference, pp.171-186, 2000
- [18] CHARKALUK E., CONSTANTINESCU A. : *"An energetic approach in thermomechanical fatigue for silicon molybdenum cast iron"*, Materials at high temperatures 17(3), pp.373-380, 2000
- [19] COFFIN L.F. : *"A study of the effect of cyclic thermal stresses on a ductile material"*, Trans. ASME, 53-A76, pp.931-950, 1953
- [20] COFFIN L.F. : *"Fatigue at high temperatures"*, Fatigue at elevated temperatures ASTM STP 520, pp.5-34, 1973
- [21] COHEN M., SPRIMONT J.P. : *"Optimisation de la déformation thermique des disques de frein"*, 3ème congrès International SIA "Méthodologies et techniques de simulation numérique : contribution au développement automobile", mai 1996
- [22] COLE, HUTCH : *"Stresses produced in a half plane by moving loads"*, J. Applied Mechanics, vol.25, Trans ASME, vol. 80, pp.433-436, 2000
- [23] COPIN R., BODOVILLÉ G., DESPLANQUES Y., DEGALLAIX G., BERTHIER Y., PETIT J.M. : *"Essais de freinage sur banc à échelle réduite d'un couple disque-garniture utilisé sur le TGV-PBKA"*, Journées Européennes du Freinage, pp.141-150, 1998
- [24] CURNIER A. : *"Méthodes numériques en mécanique des solides"*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1993
- [25] DANG VAN K., INGLEBERT G., PROIX J.M. : *"Sur un nouvel algorithme de calcul de structure élastoplastique en régime stationnaire"*, 3ème colloque "Tendances actuelles en calcul de structures", (ed. Pluralis), Bastia, Paris, pp.387-400, 1985
- [26] DANG VAN K., MAITOURNAM M.H. : *"Steady -State Flow in classical elastoplasticity : Applications to repeated rolling and sliding contact"*, J. Mech. Phys. Solids, Vol.41, n°11, pp.1691-1710, 1993
- [27] DANG VAN K. : *"Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue"*, in D.L. McDowell and R. Ellis(eds), Advances in multiaxial fatigue, ASTM STP 1991, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp.120-130, 1993
- [28] DANG VAN K., MAITOURNAM H.M. : *"Fatigue polycyclique des structures"*, cours d'enseignement thématique de l'ENSTA, 1996
- [29] DANG VAN K., MAITOURNAM H.M., PRASIL B. : *"Elastoplastic analysis of repeated moving contact application to railways damage phenomena"*, Wear 196, pp.77-81, 1996
- [30] DANG VAN K. : *"Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach"*, in : Dang Van K., Papadoupoulos I.V. (éds), High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Courses and Lectures n°392, Springer-Verlag, pp.57-88, 1999

- [31] DAY A.J., NEWCOMB T.P. : *"The dissipation of frictional energy from the interface of an annular disk brake"*, Proc.Instn.Mech.Engrs, vol.198D, pp.201-209, 1984
- [32] DAY A.J. : *"Brake interface temperature prediction"*, 2nd brakes workshop, University of Bradford, nov. 1990
- [33] D'CRUZ A.H. : *"Surface crack initiation in ventilated disc brakes under transient thermal loading"*, I.Mech.E., C382/053, 1989
- [34] DOW T.A. : *"Thermoelastic effects in brakes"*, Wear, vol.59, pp.213-221, 1980
- [35] DROBECQ V., GALLO Y., RAVALARD Y. : *"Modélisation d'un système de freinage ferroviaire pour l'étude du crissement"*, Journées Européennes du Freinage 98, pp.71-80, 1998
- [36] DUBENSKY R.G. : *"Experimental techniques for rotor performance measurements"*, SAE paper 859978, 1985
- [37] DUFRENOY P. : *"Etude du comportement thermomécanique des disques de freins vis à vis des risques de défaillance. Application au domaine ferroviaire"*, Thèse de l'université des sciences et technologies de Lille, 1995
- [38] EISENGRABER R., GROCHOWICZ J., SCHUSTER M., AUGSBURG K., KOCH L. : *"Comparison of different methods for the determination of the friction temperature of disc brakes"*, Int. Congress and Exposition, SAE, Detroit, Michigan, 1999
- [39] FLOQUET A., DUBOURG M.C. : *"Nonaxisymmetric effects for three-dimensional analysis of a brake"*, ASME Journal of tribology, vol.116, pp.401-408, 1994
- [40] FLOQUET A., DUBOURG M.C. : *"Realistic braking operation simulation of ventilated disk brakes"*, ASME Journal of tribology, vol.118, pp.466-472, 1996
- [41] HALFORD G.R., HIRSCHBERG M.H., MANSON S.S. : *"Temperature effects on the strain-range partitioning approach for creep fatigue analysis"*, Fatigue at Elevated Temperature - ASTM STP 520, pp.658-669, 1973
- [42] HANUS E., MAITOURNAM M.H., DANG VAN K. : *"Pressure rolling contact : steady-state flow analysis and comparison with experimental data"*, Int. J. Solids Structures, Vol. 33, n°25, pp.3739-3753, 1996
- [43] HILL R. : *"The mathematical theory of plasticity"*, Clarendon Press, Oxford (GB), 1950
- [44] HENNEQUET G. : *"Martèlement en cours de freinage"*, BT RNUR, NR71, pp.32-37, 1994
- [45] JOHNSON K.L. : *"Contact mechanics"*, Cambridge, 1985
- [46] JOSEFSON B.L., STIGH U., HJELM H.E. : *"A nonlinear kinematic hardening model for elastoplastic deformations in grey cast iron"*, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol.117, pp.145-150, 1995
- [47] JIMBO Y. ET AL. : *"Development of high thermal conductivity cast iron for brake disc rotor"*, Warrendale SAE, pp.22-28, 1990
- [48] KAO T.K., RICHMOND J.W., DOUARRE A. : *"Brake disc hot spotting and thermal judder : an experimental and finite element study"*, Int.J. of Vehicle Design, Transaction of the ASME, pp.497-507, 1974

- [49] KENNEDY F.E., LING F.F. : *"A thermal, thermoelastic and wear simulation of a high-energy sliding contact problem"*, Journal of lubrication Technology, vol.23, pp.276-296, 2000
- [50] KENNEDY F.E., COLIN F., FLOQUET A., GLOVSKY R. : *"Improved techniques for finite element analysis of sliding surface temperatures"*, Numerical and experimental methods applied to tribology, D. Dowson et al., eds., Westbury house, pp.138-150, 1984
- [51] KIM S.S., LEE S.H., LEE S.M. : *"Thermomechanical wear mechanism of friction brake"*, Proceedings of the international tribology conference, Tokohama, pp.1567-1572, 1995
- [52] KOITER W.T. : *"General theorems for elasto-plastic solids"*, Progress in solid mechanics, eds. Sneddon, J.N. and Hill, R., 1, North-Holland, Amsterdam, pp.165-221, 1960
- [53] KREITLOW W., SCHRODTER F., MATTHAI H. : *"Vibration and hum of disc brakes under load"*, SAE 850079, 1985
- [54] KWANGJIN L., BARBER J.R. : *"An experimental investigation of frictionally-excited thermoelastic instability in automotive disk brakes under a drag application"*, Journal of tribology, vol.116, pp.409-414, 1994
- [55] LADEVÈZE P. : *"Mécanique non-linéaire des structures"*, Hermès, Paris, 1996
- [56] LARROUTUROU B. : *"Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur"*, Majeure Science de l'ingénieur et calcul scientifique, tome 2, Département de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique, 1988
- [57] LEMAÎTRE J., CHABOCHE J.L. : *"Mécanique des matériaux solides"*, Dunod, 1985
- [58] LUONG M.P., DANG VAN K. : *"Infrared thermographic evaluation of fatigue limit in metals"*, 27th QIRT Eurotherm Seminar - Paris, 1992
- [59] MAITOURNAM M.H. : *"Formulation et résolution numérique des problèmes thermoviscoplastiques en régime permanent"*, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989
- [60] MAITOURNAM M.H. : *"Finite Elements Applications Numerical Tools and Specific Fatigue Problems"*, in : Dang Van K., Papadoupoulos I.V. (Éds), High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, pp.169-187, 1999
- [61] MAITOURNAM M.H., NGUYEN-TAJAN T.M.L. : *"Approche multi-échelle en fatigue polycyclique anisotherme"*, C.R.Acad.Sci.Paris, Série IIb, Mécanique des solides et des structures, pp.373-379, 2000
- [62] MANDEL J., ZARKA J., HALPHEN B. : *"Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique"*, Mechanics Research Communications 4, pp.309-314, 1977
- [63] MANSON S.S. : *"Behaviour of materials under conditions of thermal stresses"*, Technical report TN 2933, NACA, 1953
- [64] MAZET G.B., COURTIN T. : *"La simulation du freinage chez Messier-Bugatti"*, Journées Européennes du Freinage 98, pp.115-122, 1998
- [65] MISSORI S., SILI A. : *"Optimizing proportions of railway brake discs by temperature transient evolution"*, Proc. Inst. Mech. Engrs., vol.202, pp.91-99, 1988

- [66] MOIROT F. : "*Etude de la stabilité d'un équilibre en présence de frottement de Coulomb*", Thèse de l'Ecole Polytechnique, 1998
- [67] NGUYEN-TAJAN T.M.L., MAITOURNAM H.M., DANG VAN K. : "*Multi-scale approach for anisothermal high-cycle fatigue*", 6th Int. Conf. on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture, 2000
- [68] NGUYEN Q.S. : "*On the elastic plastic initial-value problem and its numerical integration*", Int. J. Num. Meth. Engng. 11, pp.817-832, 1977
- [69] NGUYEN Q.S., RAHIMIAN : "*Mouvement permanent d'une fissure en milieu élastoplastique*", J. de Mech. Appl., 5, pp.95-120, 1981
- [70] NGUYEN Q.S. : "*Stability and nonlinear solid mechanics*", J. Wiley & Sons, 2000
- [71] PANIER S., DUFRENOY P., WEICHERT D. : "*Modèle numérique de formation de points chauds dans les organes de friction*", Colloque national en calcul des structures, pp.515-522, 2001
- [72] PAPADOPOULOS I.V. : "*Critical Plane Approaches in High-cycle Fatigue : on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on a critical plane*", Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures 21 , pp.269-285, 1998
- [73] PAPADOPOULOS I.V. : "*Multiaxial fatigue limit criterion of metals : a mesoscopic scale approach*", in : Dang Van K., Papadopoulos I.V. (Éds), High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Courses and Lectures No. 392, Springer-Verlag, pp.89-143, 1999
- [74] POMMIER S. : "*Fatigue thermique d'une roue-frein*", Journées Européennes du Freinage 98, 1998
- [75] RIGHES G., CALDERALE P.M. : "*Thermal transient analysis of automotive disk brakes and cylinder liners*", ATA Ingegneria Automotivistica Motor Car Engineering, vol.52, n°11 – 12, pp.509-515, 1999
- [76] SAKAMOTO H., TOYAMA K., HIRAKAWA K., NAKATA M. : "*Fracture analysis and product development of brake disc*", ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 1997
- [77] SALENÇON J. : "*Méthode des lignes de glissement*", Mise en forme des métaux et alliages ch. XII, Ecole d'été de métallurgie Physique de Villars-sur-Ollon, 1975
- [78] SAMIE F., SHERIDAN D.C. : "*Contact analysis for a passenger car disc brake*", pp. 9-1, 1987
- [79] SANTINI J.J., KENNEDY F.E. : "*An experimental investigation of surface temperatures and wear in disk brakes*", Lub.Eng., vol.116, pp.402-417, 1975
- [80] SHUQIN DU, ZAGRODZKI P., BARBER J.R., HULBERT G.M. : "*Finite element analysis of frictionally-excited thermoelastic instability*", J. Thermal Stresses, vol.20, pp.185-201, 1997
- [81] SIMO J.C., HUGHES T.J.R. : "*Computational inelasticity*", Springer-Verlag, 1998
- [82] SKELTON R.P. : "*Energy criterion for high temperature low-cycle fatigue failure*", Mater.Sci.Technol., 7, pp.427-439, 1991

- [83] TIROVIC M., DAY A.J. : *"Disc brake interface pressure distributions"*, Instn.Mech.Engrs., vol.205, pp.137-146, 1991
- [84] THOMS E. : *"Disc brakes for heavy vehicles"*, Instn.Mech.Engrs., Int. Conf. on disc brakes for commercial vehicles, C464/88, pp.133-137, 1988
- [85] TUMBRINK H.J. : *"Measurement of load distribution on disc brake pads and optimization of disc brakes using the ball pressure method"*, SAE paper 890863, 1989
- [86] VALLET F. : *"Etude de la fissuration d'un disque de frein à partir de l'analyse de son comportement thermomécanique"*, Thèse de l'INSA de Lyon, 1999
- [87] WENTENKAMP H.R., KIPP R.M. : *"Hot spot heating by composite shoes"*, J.Eng.Ind., pp.453-458, 1976
- [88] ZARKA J., : *"Direct analysis of elastic-plastic structures with overlay materials during cyclic loading"*, Int. J. Num. Meth. Engng 15, pp.225-235, 1980
- [89] ZARKA J., FRELAT J., INGLEBERT G. AND KASMAI-NANIDI P. : *"A new approach to inelastic analysis of structures"*, Martinus Nijhoff, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1988
- [90] ZHOU J.L., TITS A.L : *"Non monotonic line search for minimax problems"*, J. Optim. Theory Appl. 76, pp.455-476, 1993
- [91] H.K.S. : *"Adaptive meshing"*, ABAQUS/Explicit - User's manual, vol.1, version 5.8, pp.7.6.1-7.6.5, 1998